

Das Flächenbüschel zweiter Ordnung

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde der hohen

Philosophischen Fakultät der Universität Rostock

Vorgelegt von

Erich Stoermer

aus Rostock

Referent: Geh. Hofrat Prof. Dr. Staude.

Druck der Spezialdruckerei für Dissertationen
Zahn & Baendel, Buchdruckerei für alle Sprachen,
Kirchhain N.-L.

Vorwort.

Die Arten des Flächenbüschels zweiter Ordnung und die kanonischen Gleichungen der Grundflächen sind von Sylvester, Lüroth, Killing (Weierstrass), Gundelfinger, Lindemann[1]) und neuerdings auch von Heffter[2]) eingehend behandelt worden. Wenn hier noch einmal eine Darstellung des Stoffes gegeben werden soll, so geschieht es in der Absicht, die systematische Behandlung des Gegenstandes auf einer einheitlichen Methode aufzubauen, die sich wesentlich auf die drei Elemente: Hauptpunkte, Hauptebenen und Hauptgerade gründet. Dadurch wird die Systematik der Elementarteiler geometrisch veranschaulicht und als eigentliche Grundlage der kanonischen Gleichungen herausgebildet.

[1]) Staude, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III, 2, Heft 2, S. 217. ff.

[2]) Heffter, Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. II, S. 362 ff.

§ 1. Die Hauptelemente beim Flächenbüschel 2. Ordnung.

1. Die Determinante des Flächenbüschels. Durch zwei eigentliche Flächen 2. Ordnung

(1) $$f = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l a_{kl}\, x_k\, x_l = 0, \quad g = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l b_{kl}\, x_k\, x_l = 0$$

von nicht verschwindender Determinante

(2) $$A = |a_{kl}| \neq 0, \quad B = |b_{kl}| \neq 0$$

und durch einen variablen Parameter λ sei das Flächenbüschel 2. Ordnung

(3) $$f - \lambda g = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l (a_{kl} - \lambda\, b_{kl})\, x_k\, x_l = 0$$

gegeben. Zu den vier Werten λ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, für die die Büscheldeterminante

(4) $$\Delta(\lambda) = |a_{kl} - \lambda\, b_{kl}|$$

verschwindet, gehören die vier entarteten Flächen des Büschels, im allgemeinen also die vier Büschelkegel. Wir wollen die zu (2) und (4) gehörigen Unterdeterminanten dritten Grades bezüglich mit

(5) $$A_{kl},\ B_{kl},\ \Delta_{kl}(\lambda), \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad l = 1, 2, 3, 4,$$

die entsprechenden Unterdeterminanten zweiten Grades mit

(6) $$\alpha_{kl},\ \beta_{kl},\ \delta_{kl}(\lambda) \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6; \quad l = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$$

bezeichnen. Die Flächen (1) haben dann in Ebenenkoordinaten die Gleichungen

(7) $$F = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l A_{kl}\, u_k\, u_l = 0, \quad G = \sum_1^4{}^k \sum_1^4{}^l B_{kl}\, u_k\, u_l = 0.$$

2. Hauptpunkte und Hauptebenen. Zwischen Pol und Polarebene in bezug auf die beiden Flächen (1) bestehen die Gleichungen:

(8) $$u_k = \sum_1^4{}^l a_{kl}\, x_l, \quad u_k = \sum{}^l b_{kl}\, x_l, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

$$(9) \qquad x_l = \sum_1^4{}^k A_{kl}\, u_k, \qquad x_l = \sum_1^4{}^k B_{kl}\, u_k, \quad l = 1, 2, 3, 4$$

wo auf den linken Seiten noch ein Proportionalitätsfaktor hinzuzudenken ist ($\varsigma\, u_k = \sum_1^4{}^l a_{kl}\, x_l$).

Hat der Punkt x_l in bezug auf beide Flächen (1) dieselbe Polarebene u_k, hat also auch die Ebene u_k in bezug auf beide denselben Pol x_l, so müssen die beiden Gleichungssysteme (8) bei gleichen x_l auch bis auf einen Faktor λ gleiche u_k ergeben und die Gleichungen (9) bei gleichen u_k bis auf einen Faktor μ gleiche x_l. Es müssen also, wenn wir zur Abkürzung für die halben partiellen Ableitungen der Funktionen (1) und (7) schreiben:

$$(10) \quad \begin{cases} f_k = \sum_1^4{}^l a_{kl}\, x_l, & g_k = \sum_1^4{}^l b_{kl}\, x_l, \quad k = 1, 2, 3, 4 \\ F_l = \sum_1^4{}^k A_{kl}\, u_k, & G_l = \sum_1^4{}^k B_{kl}\, u_k, \quad l = 1, 2, 2, 4 \end{cases}$$

die Bedingungen bestehen:

$$(11) \qquad f_k - \lambda\, g_k = \sum_1^4{}^l (a_{kl} - \lambda\, b_{kl})\, x_l = 0,$$

$$(11') \qquad F_l - \mu\, G_l = \sum_1^4{}^k (A_{kl} - \mu\, B_{kl})\, u_k = 0.$$

Wir nennen solche Punkte und Ebenen, die diesen Gleichungen genügen, Hauptpunkte und Hauptebenen.

Die Gleichungen (11) und (11') erfordern das Verschwinden der Determinanten:

$$(12) \quad \Delta(\lambda) = |a_{kl} - \lambda\, b_{kl}| = 0 \quad (12')\; E(\mu) = |A_{kl} - \mu\, B_{kl}| = 0.$$

Mit den vier Wurzeln λ oder μ dieser Gleichungen geben dann die Gleichungen (11) und (11') die zu diesen Wurzeln gehörigen Hauptpunkte und Hauptebenen. Sie sind zugleich die Spitzen der Kegel im Büschel $f - \lambda\, g = 0$ und die Ebenen der Kegelschnitte in der Schar $F - \mu\, G = 0$.

3. Zusammengehörige Hauptelemente. Da zu jedem Hauptpunkt eine Hauptebene gehört, nämlich seine Polarebene inbezug auf f und g, so sind die Hauptebenen durch die Hauptpunkte bestimmt. Ist etwa $x^{(i)}$ ein zur Wurzel λ_i gehöriger Hauptpunkt, so ist nach (11) für die entsprechende Hauptebene:

(13) $\quad u_k^{(i)} = \sum_1^4 {}^l \, a_{kl} \, x_l^{(i)}, \quad u_k^{(i)} = \lambda_i \sum_1^4 {}^l \, b_{kl} \, x_l^{(i)}, k = 1, 2, 3, 4.$

oder aufgelöst:

(13 a) $\quad A \, x_l^{(i)} = \sum_1^4 {}^k \, A_{kl} \, u_k^{(i)}, \quad B \, \lambda_i \, x_l^{(i)} = \sum_1^4 {}^k \, B_{kl} \, u_k^{(i)}, l = 1, 2, 3, 4.$

Daraus folgt mit Elimination von $x^{(i)}$:

$$\sum_1^4 {}^k \left(A_{kl} - \frac{A}{B\lambda_i} B_{kl}\right) u_k^{(i)} = 0$$

Die Polarebene $u^{(i)}$ eines zur Wurzel λ_i gehörigen Hauptpunktes genügt also den Gleichungen (11') mit $\mu_i = \frac{A}{B\lambda_i}$, woraus folgt:

I. Wenn λ_i eine Wurzel von (12) ist, so ist

(14) $$\mu_i = \frac{A}{B\lambda_i}$$

eine Wurzel von (12'). λ_i und μ_i heißen „reziproke“ Wurzeln.

Da die Determinante (12) den Wert hat

$$\Delta(\lambda) = A - C\lambda + E\lambda^2 - D\lambda^3 + B\lambda^4,$$

worin A und B die Determinanten (2) sind, und da in der Gleichung

$$\lambda^4 - \frac{D}{B}\lambda^3 + \frac{E}{B}\lambda^2 - \frac{C}{B}\lambda + \frac{A}{B} = 0$$

wie in jeder algebraischen Gleichung das konstante Glied dem Produkte aus allen Wurzeln gleich sein, also

(14 a) $$\frac{A}{B} = \lambda_1 \, \lambda_2 \, \lambda_3 \, \lambda_4$$

sein muß, so folgt mit (14): Die Wurzeln von (12') sind im allgemeinen

(15) $\quad \mu_1 = \lambda_2\lambda_3\lambda_4, \quad \mu_2 = \lambda_1\lambda_3\lambda_4, \quad \mu_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_4, \quad \mu_4 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$

Weiter haben wir gefunden:

II. Die Polarebene eines zur Wurzel λ_i gehörigen Hauptpunktes ist eine zur „reziproken“ Wurzel μ_i (14) gehörige Hauptebene.

Da zu jedem Hauptpunkt eine Hauptebene gehört, so gehören zu reziproken Wurzeln gleiche Mannigfaltigkeiten von Hauptpunkten und Hauptebenen, entweder ein Hauptpunkt und eine Hauptebene oder eine Hauptpunktreihe und ein Hauptebenenbüschel oder ein Hauptpunktefeld und ein Hauptebenenbündel.

4. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Hauptpunkte. Sind $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ zwei zu den verschiedenen Wurzeln λ_i und λ_j von (12) gehörige Hauptpunkte, so gelten für sie nach (11) die Gleichungen:

$$f_k^{(i)} - \lambda_i\, g_k^{(i)} = 0 \qquad f_k^{(j)} - \lambda_j\, g_k^{(j)} = 0 \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Fielen die beiden Hauptpunkte $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ zusammen, so wäre die Folge:

$$f_k^{(i)} = 0,\ g_k^{(i)} = 0; \qquad f_k^{(j)} = 0,\ g_k^{(j)} = 0 \qquad k = 1, 2, 3, 4.$$

Diese Gleichungen könnten nur bestehen, wenn die Determinanten (2) verschwänden, was wir ausschlossen. Daraus ergibt sich:

III. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Hauptpunkte liegen stets getrennt. (Heffter S. 111).

5. Hauptpunkt und Hauptebene zu zwei nicht reziproken Wurzeln. Ist x ein zur Wurzel λ gehöriger Hauptpunkt und u eine zur Wurzel μ gehörige Hauptebene, so gilt nach (11) und (11′), wenn wir in (11′) eine bloße Änderung der Indicesbezeichnung vornehmen:

$$(16) \quad \sum_1^4{}^{l}\, a_{kl}\, x_l = \lambda \sum_1^4{}^{l}\, b_{kl}\, x_l \qquad (16') \quad \sum_1^4{}^{m}\, A_{km}\, u_m = u \sum_1^4{}^{m}\, B_{km}\, u_m$$

$$k = 1, 2, 3, 4.$$

Durch Multiplikation der vier Gleichungen (16) mit den vier entsprechenden Gleichungen (16′) und durch Summation über k entsteht:

$$\sum_1^4{}^{l} \sum_1^4{}^{m} \left(\sum_1^4{}^{k}\, a_{kl}\, A_{km} \right) x_l\, u_m = \lambda\mu \sum_1^4{}^{l} \sum_1^4{}^{m} \left(\sum_1^4{}^{k}\, b_{kl}\, B_{km} \right) x_l\, u_m$$

Da hierin wegen der Determinantensätze

$$\sum_1^4{}^{k}\, a_{kl}\, A_{km} = \begin{cases} 0 \text{ für } l \neq m \\ A \text{ für } l = m \end{cases}$$

alle Glieder für $l \neq m$ wegfallen, bleibt die Indentität

$$(A - \lambda\mu\, B) \sum_1^4{}^{l}\, x_l\, u_l = 0$$

übrig. Sind nun λ und μ keine reziproken Wurzeln, gilt aber im Gegensatze zu (14):

$$\mu \neq \frac{A}{B\lambda},$$

so folgt:

$$\sum_1^4{}^{l}\, x_l\, u_l = 0$$

IV. **Ein zur Wurzel λ gehöriger Hauptpunkt liegt mit einer zur Wurzel μ gehörigen Hauptebene stets vereinigt, wenn λ und μ keine reziproken Wurzeln sind.** (Heffter, S. 111).

Auf die gegenseitige Lage eines Hauptpunktes und einer Hauptebene, die zu reziproken Wurzeln gehören, kommen wir später zurück.

6. Hauptgerade. Zwischen reziproken Polaren in bezug auf beide Flächen (1) gelten die Gleichungen

$$(17)\quad p'_{\bar{k}} = \sum_1^6{}^l \alpha_{kl}\, p_l, \qquad (17')\quad p'_{\bar{k}} = \sum_1^6{}^l \beta_{kl}\, p_l,$$

oder:

$$(18)\quad A p_{\bar{l}} = \sum_1^6{}^k \alpha_{kl}\, p'_l, \qquad (18')\quad B p_{\bar{l}} = \sum_1^6{}^k \beta_{kl}\, p'_k.$$

Soll nun p eine Hauptgerade sein, die in bezug auf beide Flächen dieselbe reziproke Polare p' hat, wodurch auch p' eine Hauptgerade wird, so müssen für p und p' die Gleichungen gelten:

$$(19)\quad \sum_1^6{}^l (\alpha_{kl} - \rho\beta_{kl})\, p_l = 0, \qquad (19')\quad \sum_1^6{}^k (\alpha_{kl} - \rho'\beta_{kl})\, p'_k = 0,$$

die im Grunde dieselben sind. Für sie ist erforderlich:

$$(20)\quad \Theta(\rho) = |\alpha_{kl} - \rho\beta_{kl}| = 0, \qquad (20')\quad \Theta(\rho') = |\alpha_{kl} - \rho'\beta_{kl}| = 0.$$

Diese beiden Gleichungen sechsten Grades sind ebenfalls dieselben. Genügt also p mit einer Wurzel ρ den Gleichungen (19) und p' mit ρ' den Gleichungen (19'), so muß sein:

$$(21)\quad p'_{\bar{k}} = \sum_1^6{}^l \alpha_{kl}\, p_l = \rho \sum_1^6{}^l \beta_{kl}\, p_l;$$

$$(21')\quad p_{\bar{l}} = \sum_1^6{}^k \alpha_{kl}\, p'_k = \rho' \sum_1^6{}^k \beta_{kl}\, p'_k.$$

7. Die Bedingung $P = \sum_1^6{}^l p_l\, p_{\bar{l}} = 0$. Die Gleichung (21) lautet in doppelter Schreibweise:

$$\sum_1^6{}^l \alpha_{kl}\, p_l = \rho \sum_1^6{}^l \beta_{kl}\, p_l, \qquad \sum_1^6{}^m \alpha_{\bar{k}m}\, p_m = \rho \sum_1^6{}^m \beta_{\bar{k}m}\, p_m.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen und Summation über k entsteht

$$\sum_1^6{}^l \sum_1^6{}^m \left(\sum_1^6{}^k \alpha_{kl}\,\alpha_{\overline{km}}\right) p_l\, p_m = \rho^2 \sum_1^6{}^l \sum_1^6{}^m \left(\sum_1^6{}^k \beta_{kl}\,\beta_{\overline{km}}\right) p_l\, p_m,$$

und daraus wieder nach bekannten Determinantenregeln:

$$A \sum_1^6{}^l p_l\, p_{\overline{l}} = \rho^2\ B \sum_1^6{}^l p_l\, p_{\overline{l}}$$

oder

$$(A - \rho^2 B) \sum_1^6{}^l p_l\, p_{\overline{l}} = (A - \rho^2 B)\, P = 0.$$

V. Die den sechs Gleichungen (19) für eine Wurzel (ρ) der Gleichung (20) entsprechenden Größen p sind auch wirklich die Koordinaten einer geraden Linie, wenn nicht gerade:

$$\rho^2 = \frac{A}{B} \tag{22}$$

ist. (Dann heißt ρ eine „singuläre" Wurzel, und die Frage nach $P = 0$ bleibt offen.)

8. Zusammengehörige Hauptgerade. Die Auflösung der Gleichungen (21) oder:

$$p'_{\overline{k}} = \sum_1^6{}^l a_{kl}\, p_l \qquad p'_{\overline{k}} = \rho \sum_1^6{}^l \beta_{kl}\, p_l \tag{23}$$

gibt:

$$A p_{\overline{l}} = \sum_1^6{}^k \alpha_{kl}\, p'_k \qquad B \rho p_{\overline{l}} = \sum_1^6{}^k \beta_{kl}\, p'_k,$$

woraus durch Elimination von $p_{\overline{l}}$ folgt:

$$\sum_1^6{}^k \left(\alpha_{kl} - \frac{A}{B\rho}\beta_{kl}\right) p'_k = 0. \tag{24}$$

Die reziproke Polare p' einer zur Wurzel ρ gehörigen Hauptgeraden p genügt also den Gleichungen (20′) mit $\rho' = \frac{A}{B\rho}$, was bedeutet:

VI. Wenn ρ eine Wurzel von (20) ist, so ist

$$\rho' = \frac{A}{B\rho} \tag{25}$$

eine Wurzel von (20′). ρ und ρ' heißen „reziproke" Wurzeln.

Die Gleichung (20) enthält hiernach zu jeder ihrer Wurzeln die reziproke:

$$\rho_1,\ \rho_2,\ \rho_3,\ \rho_4 = \rho'_1,\ \rho_5 = \rho'_2,\ \rho_6 = \rho'_3.$$

Eine singuläre Wurzel ist ihrer reziproken gleich und umgekehrt. Endlich gilt:

VII. Die reziproke Polare einer zur Wurzel ρ gehörigen Hauptgeraden ist eine zur reziproken Wurzel ρ' gehörige Hauptgerade.

9. Beziehung der Gleichungen 4. und 6. Grades.

Sind $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ zwei Hauptpunkte und $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ ihre Polarebenen in bezug auf f und g, so hat $p = x^{(1)} x^{(2)}$ inbezug auf beide Flächen dieselbe reziproke Polare $p' = u^{(1)} \times u^{(2)}$, ist also Hauptgerade; ebenso ist p' Hauptgerade.

VIII. Die Verbindungslinie zweier Hauptpunkte ist eine Hauptgerade, ebenso die Schnittlinie zweier Hauptebenen.

Gehören nun $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ zu λ_1 und λ_2, so ist

$$\sum_1^4{}_m a_{km} x_m^{(1)} = \lambda_1 \sum_1^4{}_m b_{km} x_m^{(1)} \quad \text{oder} \quad \sum_1^4{}_m a_{lm} x_m^{(1)} = \lambda_1 \sum_1^4{}_m b_{lm} x_m^{(1)}$$

$$\sum_1^4{}_n a_{ln} x_n^{(2)} = \lambda_2 \sum_1^4{}_n b_{ln} x_n^{(2)} \quad \text{oder} \quad \sum_1^4{}_n a_{kn} x_n^{(2)} = \lambda_2 \sum_1^4{}_n b_{kn} x_n^{(2)}.$$

Durch Multiplikation je zweier übereinander stehender Gleichungen und nachherige Subtraktion folgt:

$$\sum_1^4{}_m \sum_1^4{}_n (a_{km} a_{ln} - a_{lm} a_{kn}) x_m^{(1)} x_n^{(2)} = \lambda_1 \lambda_2 \sum_1^4{}_m \sum_1^4{}_n (b_{km} b_{ln} - b_{lm} b_{kn}) \cdot x_m^{(1)} x_n^{(2)}, \qquad kl = 23, 31, 12, 14, 24, 34$$

oder

$$\sum_1^6{}_{mn} \alpha_{kl,\, mn}\, p_{mn} = \lambda_1 \lambda_2 \sum_1^6{}_{mn} \beta_{kl,\, mn}\, p_{mn}$$

oder

$$\sum_1^6{}_l (\alpha_{kl} - \lambda_1 \lambda_2 \beta_{kl}) p_l = 0. \tag{26}$$

Die Verbindungslinie p zweier zu den Wurzeln λ_1 und λ_2 gehöriger Hauptpunkte genügt also den Gleichungen (19) mit $\rho = \lambda_1 \cdot \lambda_2$.

Daher ist $\rho = \lambda_1 \lambda_2$ eine Wurzel von (20) und p eine zu dieser Wurzel gehörige Hauptgerade.

IX. Die Gleichung 6. Gerades (20) hat daher im allgemeinen die Wurzeln:

$$\rho_1 = \lambda_2\lambda_3, \quad \rho_2 = \lambda_3\lambda_1, \quad \rho_3 = \lambda_1\lambda_2, \quad \rho_4 = \lambda_1\lambda_4, \quad \rho_5 = \lambda_2\lambda_4, \quad \rho_6 = \lambda_3\lambda_4, \tag{27}$$

die wegen (14a) nach (25) paarweise reziprok und im allgemeinen nicht singulär sind.

Für eine singuläre Wurzel ist nach (14a) und (22): $\rho^2 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4$. So ist z. B. für $\lambda_3 = \lambda_1$, $\lambda_4 = \lambda_2$:
$\rho_1 = \lambda_1 \lambda_2$, $\rho_2 = \lambda_1^2$, $\rho_3 = \lambda_1 \lambda_2$, $\rho_4 = \lambda_1 \lambda_2$, $\rho_5 = \lambda_2^2$, $\rho_6 = \lambda_1 \lambda_2$, also die Wurzel $\rho_1 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_6$ singulär.

10. Differentialquotienten von $\Delta(\lambda)$. Für die Differentialquotienten der Determinante (4) ergibt sich:

$$(28)\quad \begin{cases} -\Delta'(\lambda) = \sum\limits_{1}^{4}{}_k \sum\limits_{1}^{4}{}_l\, b_{kl}\, \Delta_{kl}(\lambda), \\ {}^1\!/_2\, \Delta''(\lambda) = \sum\limits_{1}^{6}{}_k \sum\limits_{1}^{6}{}_l\, \beta_{\bar{k}\bar{l}}\, \delta_{kl}(\lambda), \\ -{}^1\!/_6\, \Delta'''(\lambda) = \sum\limits_{1}^{4}{}_k \sum\limits_{1}^{4}{}_l\, B_{kl}\,(a_{kl} - \lambda b_{kl}), \\ {}^1\!/_{24}\, \Delta''''(\lambda) = B. \end{cases}$$

Bei den Unterdeterminanten 2. Grades (6) von $\Delta(\lambda)$ (4) bedeuten k oder l die Nummern der sechs Kombinationen 23, 31, 12, 14, 24, 34 und $\bar{k}$ oder $\bar{l}$ die komplementären, so daß z. B. 2 und $\bar{2}$ die Nummern von 31 und 24 sind. (S. Staude, Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene, S. 411.)

11. Die Elementarteiler. Ist λ_i eine Wurzel der Determinante $\Delta(\lambda)$, so soll l_i die Vielfachheit dieser Wurzel bedeuten ($l_i = 1, 2, 3, 4$), so daß $(\lambda - \lambda_i)^{l_i}$ die höchste Potenz von $(\lambda - \lambda_i)$ ist, die in $\Delta(\lambda)$ enthalten ist. Dann sei $(\lambda - \lambda_i)^{l_i'}$ die höchste Potenz von $\lambda - \lambda_i$, die in allen Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$ vorkommt ($l_i = 0, 1, 2, 3$), $(\lambda - \lambda_i)^{l_i''}$ die höchste, die in

(29) $e_i = l_i - l_i'$ \ l_i	1. $l_1 = 1;\ l_2 = 1;\ l_3 = 1;\ l_4 = 1$	2. $l_1 = 2;\ l_2 = 1;\ l_4 = 1$	
I. $e = 1, 1, 1, 1$	$l_1' = 0;\ l_2' = 0;\ l_3' = 0;\ l_4' = 0$	$l_1' = 1,\ l_1'' = 0;\ l_2' = 0,\ l_4' = 0$	
II. $e = 2, 1, 1$		$l_1' = 0;\ l_2' = 0;\ l_4' = 0$	
III. $e = 2, 2$			
IV. $e = 3, 1$			
V. $e = 4$			

allen $\delta_{kl}(\lambda)$ vorkommt ($l_i'' = 0, 1, 2$) und endlich $(\lambda - \lambda_i)^{l_i'''}$ die höchste, die in allen Elementen $(a_{kl} - \lambda b_{kl})$ der Determinante vorkommt ($l_i''' = 0, 1$). Für die Potenzausdrücke, die nach Weierstraß „Elementarteiler" der Determinante (4) heißen, gibt es dann nur die in der unten stehenden Tabelle bezeichneten 14 Möglichkeiten (Vgl. Muth, Theorie der Elementarteiler, Enzyklopädie der math. Wiss., Bd. III, 2 Heft 1, S. 316).

Da im Falle I, 5 von (29) wegen $a_{kl} = b_{kl}$ beide Grundflächen (1) identisch sind, fällt dieser Fall als trivial fort; es bleiben nur 13 Fälle.

12. Koordinatentransformation. Beim Uebergang von dem ursprünglichen Koordinatentetraeder $E_1\, E_2\, E_3\, E_4$ zu einem neuen $J_1\, J_2\, J_3\, J_4$ durch die Substitution

$$(30) \qquad x_k = \sum_1^4{}_m\, x_k^{(m)}\, y_m, \qquad x_l = \sum_1^4{}_n\, x_l^{(n)}\, y_n,$$

wo $x_k^{(m)}$ die Koordinaten der neuen Ecke J_m sind, werden die Gleichungen der Grundflächen:

$$(31) \quad \begin{cases} f = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l\, a_{kl}\, x_k\, x_l = \sum_1^4{}_m \sum_1^4{}_n\, f_{m\,n}\, y_m\, y_n = 0, \\ g = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l\, b_{kl}\, x_k\, x_l = \sum_1^4{}_m \sum_1^4{}_n\, g_{m\,n}\, y_m\, y_n = 0 \end{cases}$$

mit

$$(32)\; f_{m\,n} = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l\, a_{kl}\, x_k^{(m)}\, x_l^{(n)} = \sum_1^4{}_k\, f_k^{(n)}\, x_k^{(m)}, \quad g_{m\,n} = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l\, b_{kl}\, x_k^{(m)}\, x_l^{(n)}$$
$$= \sum_1^4{}_k\, g_k^{(n)}\, x_k^{(m)}.$$

3. $l_1 = 2;\ l_2 = 2$	4. $l_1 = 3;\ l_4 = 1$	5. $l_1 = 4$
$l_1' = 1, l_1'' = 0; l_2' = 1, l_2'' = 0$	$l_1' = 2, l_1'' = 1, l_1''' = 0; l_4' = 0$	$l_1' = 3,\ l_1'' = 2,\ l_1''' = 1$
$l_1' = 0;\ l_2' = 1,\ l_2'' = 0$	$l_1' = 1,\ l_1'' = 0;\ l_4' = 0$	$l_1' = 2, l_1'' = 1, l_1''' = 0$
$l_1' = 0;\ l_2' = 0$		$l_1' = 2,\ l_1'' = 0$
	$l_1' = 0;\ l_4' = 0$	$l_1' = 1,\ l_1'' = 0$
		$l_1' = 0$

Die Büschelgleichung wird entsprechend:

$$(33)\quad f-\lambda g=\sum_{1}^{4}{}^{k}\sum_{1}^{4}{}^{l}(a_{kl}-\lambda b_{kl})\,x_k\,x_l=\sum_{1}^{4}{}^{m}\sum_{1}^{4}{}^{n}(f_{mn}-\lambda g_{mn})\cdot y_m\,y_n=0.$$

13. Invarianteneigenschaften. Bezeichnen wir die neue Büscheldeterminante $|f_{mn}-\lambda g_{mn}|$ mit $\Delta^0(\lambda)$ und entsprechend ihre Unterdeterminanten mit $\Delta^0_{kl}(\lambda)$ und $\delta^0_{kl}(\lambda)$, so gelten die Beziehungen (S. Staude, Analytische Geometrie des Punktepares, des Kegelschnittes und der Fläche 2. O., II, S. 775).

$$(34)\quad\left\{\begin{aligned}
\Delta^0(\lambda) &= S^2\,\Delta(\lambda),\\
\Delta^0_{mn}(\lambda) &= \sum_{1}^{4}{}^{k}\sum_{1}^{4}{}^{l}\Delta_{kl}(\lambda)\,u_k^{(m)}\,u_l^{(n)},\\
\delta^0_{mn}(\lambda) &= \sum_{1}^{6}{}^{k}\sum_{1}^{6}{}^{l}\delta_{kl}(\lambda)\,p_k^{(m)}\,p_l^{(n)},\\
f_{mn}-\lambda g_{mn} &= \sum_{1}^{4}{}^{k}\sum_{1}^{4}{}^{l}(a_{kl}-\lambda b_{kl})\,x_k^{(m)}\,x_l^{(n)}
\end{aligned}\right.$$

wo $S=|x_k^{(m)}|$ die Substitutionsdeterminante aus den Koordinaten $x_k^{(m)}$ der Ecken, $u_k^{(m)}$ die Koordinaten der Seitenflächen und $p_k^{(m)}$ die Strahlenkoordinaten der Kanten des neuen Tetraeders $J_1\,J_2\,J_3\,J_4$ sind.

Aus den Formeln (34) folgt die Invarianteneigenschaft der Tabelle (29): *Die Zugehörigkeit des Flächenpaares f, g zu einem der 14 Felder dieser Tabelle wird durch keine Koordinatentransformation geändert.*

§ 2. Lagebeziehungen der Hauptelemente.

1. Hauptpunkte zu verschiedenen Wurzeln. Für die zu λ_i und λ_j gehörigen Hauptpunkte $x^{(i)}$ und $x^{(j)}$ ist nach § 1, (11):

(1) $$f_k^{(i)} - \lambda_i g_k^{(i)} = 0, \qquad f_k^{(j)} - \lambda_j g_k^{(j)} = 0.$$

Mit $x_k^{(j)}$ und $x_k^{(i)}$ multipliziert und über k summiert, folgt:

$$\sum_1^4{}_k f_k^{(i)} x_k^{(j)} - \lambda_i \sum_1^4{}_k g_k^{(i)} x_k^{(j)} = 0, \quad \sum_1^4{}_k f_k^{(j)} x_k^{(i)} - \lambda_j \sum_1^4{}_k g_k^{(j)} x_k^{(i)} = 0$$

oder nach § 1, (32):

$$f_{ij} - \lambda_i g_{ij} = 0 \qquad f_{ji} - \lambda_j g_{ji} = 0$$

also wegen $f_{ij} = f_{ji}$, $g_{ij} = g_{ji}$, unter der Voraussetzung $\lambda_i \neq \lambda_j$:

(2) $$f_{ij} = 0, \qquad g_{ij} = 0, \qquad f_{ij} - \lambda g_{ij} = 0.$$

I. Zwei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Hauptpunkte sind harmonische Pole in bezug auf beide Grundflächen und alle Büschelflächen.

Ist also $x^{(i)}$ ein zu λ_i gehöriger Hauptpunkt, so muß jeder zu einer anderen Wurzel λ_j gehörige Hauptpunkt $x^{(j)}$ in der zu λ_i gehörigen Hauptebene, der Polarebene von $x^{(i)}$ in bezug auf f und g, liegen. Dies ist schon in § 1, IV zum Ausdruck gebracht. Weiter folgt aus I:

Ia. Drei zu verschiedenen Wurzeln gehörige Hauptpunkte können nicht in gerader Linie, vier solche nicht in einer Ebene liegen.

2. Hauptpunkt und beliebiger Punkt. Für einen zur Wurzel λ_i gehörigen Hauptpunkt $x^{(i)}$ und seine Polarebene $u^{(i)}$ ist nach § 1, (13):

$$u_k^{(i)} = \sum_1^4{}_l a_{kl} x_l^{(i)} = \lambda_i \sum_1^4{}_l b_{kl} x_l^{(i)}$$

oder mit § 1, (10) kurz:

(3) $$u_k^{(i)} = f_k^{(i)} = \lambda_i g_k^{(i)}$$

(eventuell ein Faktor $\sigma u_k^{(i)} = f_k^{(i)} = \lambda_i g_k^{(i)}$, den wir der Kürze wegen weglassen.) Ist nun $x_k^{(h)}$ ein ganz beliebiger Punkt, so folgt durch Multiplikation mit $x_k^{(h)}$ und Summation über k:

$$\sum_1^4{}_k u_k^{(i)} x_k^{(h)} = \sum_1^4{}_k f_k^{(i)} x_k^{(h)} = \lambda_i \sum_1^4{}_k g_k^{(i)} x_k^{(h)} = f_{ih} = \lambda_i g_{ih}.$$

II. Ist $x^{(i)}$ ein zur Wurzel λ_i gehöriger Hauptpunkt, $u^{(i)}$ seine Polarebene und $x^{(h)}$ ein beliebiger Punkt, so ist:

$$(4) \qquad f_{ih} = \lambda_i g_{ih} = \sum_1^4{}_k u_k^{(i)} x_k^{(h)}.$$

(Vgl. Heffter, Lehrb. d. analyt. Geometrie, II, S. 373, (40).)
Liegt insbesondere $x^{(h)}$ auf $u^{(i)}$, so folgt:

IIa. Ist $x^{(i)}$ ein zur Wurzel λ_i gehöriger Hauptpunkt und $u^{(i)}$ seine Polarebene, so ist für jeden auf $u^{(i)}$ gelegenen Punkt $x^{(h)}$:

$$(5) \qquad f_{ih} = \lambda_i g_{ih} = 0: \qquad f_{ih} = 0, \; g_{ih} = 0.$$

Fällt dagegen $x^{(h)}$ in $x^{(i)}$, so folgt aus (4):

IIb. Ist $x^{(i)}$ ein zur Wurzel λ_i gehöriger Hauptpunkt und $u^{(i)}$ seine Polarebene, so ist:

$$(6) \qquad f_{ii} = \lambda_i g_{ii} = \sum_1^4{}_k u_k^{(i)} x_k^{(i)}$$

Liegt daher $x^{(i)}$ mit $u^{(i)}$ vereinigt, so folgt:

$$(6') \qquad f_{ii} = \lambda_i g_{ii} = 0:$$

IIc. So oft ein Hauptpunkt $x^{(i)}$ auf der einen Grundfläche liegt, liegt er auch auf der anderen, und beide Flächen haben in ihm dieselbe Tangentialebene $u^{(i)}$.

3. Hauptebene und beliebige Ebene. Nach § 1, (10) und (13a) ist:

$$x_l^{(i)} = \frac{1}{A} F_l^{(i)} = \frac{1}{B\lambda_i} G_l^{(i)}.$$

Dies mit $u_l^{(h)}$ multipliziert und über l summiert, gibt:

$$\sum_1^4{}_l x_l^{(i)} u_l^{(h)} = \frac{1}{A} \sum_1^4{}_l F_l^{(i)} u_l^{(h)} = \frac{1}{B\lambda_i} \sum_1^4{}_l G_l^{(i)} u_l^{(h)},$$

so daß mit

$$(6'') \; F_{ih} = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l a_{kl} u_k^{(i)} u_l^{(h)} = \sum_1^4{}_l F_l^{(i)} u_l^{(h)}, \; G_{ih} = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l b_{kl} u_k^{(i)} u_l^{(h)}$$

folgt:

III. Ist $u^{(i)}$ eine zur Wurzel $\mu_i = \frac{A}{B\lambda_i}$ gehörige Hauptebene, $x^{(i)}$ ihr Pol und $u^{(h)}$ eine beliebige Ebene, so ist:

$$(7) \qquad F_{ih} = \mu_i \, G_{ih} = A \sum_1^4 {}_l \, x_l^{(i)} \, u_l^{(h)},$$

woraus die entsprechenden Sätze wie oben folgen.

4. Hauptgerade und beliebige Gerade. Ist $p^{(i)}$ eine zur Wurzel ρ_i gehörige Hauptgerade und $p'^{(i)}$ ihre reziproke Polare in bezug auf f und g, so ist nach § 1, (17):

$$p'^{(i)}_{\bar{k}} = \sum_1^6 {}_l \, \alpha_{kl} \, p_l^{(i)} = \rho_i \sum_1^6 {}_l \, \beta_{kl} \, p_l^{(i)}.$$

Ist nun $p^{(h)}$ eine beliebige Gerade, so folgt:

$$\sum_1^6 {}_k \, p'^{(i)}_{\bar{k}} \, p_k^{(h)} = \sum_1^6 {}_k \sum_1^6 {}_l \, \alpha_{kl} \, p_l^{(i)} \, p_k^{(h)} = \rho_i \sum_1^6 {}_k \sum_1^6 {}_l \, \beta_{kl} \, p_l^{(i)} \, p_k^{(h)}$$

oder mit den Abkürzungen

$$(8) \qquad \varphi_{ih} = \sum_1^6 {}_k \sum_1^6 {}_l \, \alpha_{kl} \, p_k^{(h)} \, p_l^{(i)}, \qquad \psi_{ih} = \sum_1^6 {}_k \sum_1^6 {}_l \, \beta_{kl} \, p_k^{(h)} \, p_l^{(i)},$$

oder in Achsenkoordinaten:

$$(9) \qquad \varphi_{ih} = \sum_1^6 {}_k \sum_1^6 {}_l \, \alpha_{\bar{k}\bar{l}} \, q_k^{(h)} \, q_l^{(i)}, \qquad \psi_{ih} = \sum_1^6 {}_k \sum_1^6 {}_l \, \beta_{\bar{k}\bar{l}} \, q_k^{(h)} \, q_l^{(i)}:$$

IV. Ist $p^{(i)}$ eine zur Wurzel ρ_i gehörige Hauptgerade, $p'^{(i)}$ ihre reziproke Polare in bezug auf f und g und $p^{(h)}$ eine beliebige Gerade, so ist:

$$(10) \qquad \varphi_{ih} = \rho_i \, \psi_{ih} = \sum_1^6 {}_k \, p'^{(i)}_{\bar{k}} \, p_k^{(h)},$$

wo vor der Summe noch ein Proportionalitätsfaktor τ zu denken ist. Insbesondere folgt, wenn $p^{(h)}$ mit $p^{(i)}$ zusammenfällt:

IVa. Ist $p^{(i)}$ eine zur Wurzel ρ_i gehörige Hauptgerade und $p'^{(i)}$ ihre reziproke Polare, also die zur reziproken Wurzel gehörige Hauptgerade, so ist:

$$(11) \qquad \varphi_{ii} = \rho_i \, \psi_{ii} = \sum {}_k \, p_k^{(i)} \, p'^{(i)}_{\bar{k}}$$

Sooft eine Hauptgerade die eine Grundfläche berührt, berührt sie auch die andere in demselben Punkte, und ihre reziproke Polare ist ihre konjugierte Tangente für beide Flächen.

5. Hauptpunkte $l' = 0$. Die Auflösung der Gleichungen § 1, (11) gibt, wenn nicht alle Unterdeterminanten $\Delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, also $l' = 0$ ist:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \Delta_{k1}(\lambda) : \Delta_{k2}(\lambda) : \Delta_{k3}(\lambda) : \Delta_{k4}(\lambda), \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Damit wird für $k = 1$ und $k = 2$:

$$x_1 x_1 : x_1 x_2 : x_1 x_3 : x_1 x_4 = \Delta_{11} : \Delta_{12} : \Delta_{13} : \Delta_{14}; \quad \rho x_1 x_1 = \Delta_{11}, \quad \rho x_1 x_2 = \Delta_{12}, \cdots$$

$$x_2 x_1 : x_2 x_2 : x_2 x_3 : x_2 x_4 = \Delta_{21} : \Delta_{22} : \Delta_{23} : \Delta_{24}; \quad \sigma x_2 x_1 = \Delta_{21}, \quad \sigma x_2 x_2 = \Delta_{22}, \cdots$$

Hieraus folgt, da $\Delta_{21} = \Delta_{12}$ ist, $\rho = \sigma$ und so allgemein:

V. Für den zur Wurzel λ_i gehörigen Hauptpunkt bei $l_i' = 0$ ist mit einem Proportionalitätsfaktor τ_i:

$$\tau_i \, x_k^{(i)} \, x_l^{(i)} = \Delta_{kl}(\lambda_i) \tag{12}$$

6. Hauptpunktreihen $l' > 0$, $l'' = 0$. Verschwinden für eine Wurzel λ alle $\Delta_{kl}(\lambda)$, aber nicht alle $\delta_{kl}(\lambda)$, so sind die Gleichungen § 1, (11) erfüllt für alle Punkte einer Geraden mit den Achsenkoordinaten:

$$q_1 : q_2 : q_3 : q_4 : q_5 : q_6 = \delta_{k1}(\lambda) : \delta_{k2}(\lambda) : \delta_{k3}(\lambda) : \delta_{k4}(\lambda) : \delta_{k5}(\lambda) : \delta_{k6}(\lambda)$$

mit $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Da die Verbindungslinie zweier Hauptpunkte eine Hauptgerade sein muß, ist die Reihe der Hauptpunkte eine Hauptgerade. — Aus der Proportion folgt, wie vorhin, da $\delta_{kl}(\lambda) = \delta_{lk}(\lambda)$ ist:

VI. Für die Achsenkoordinaten q der Hauptgeraden, auf der die zur Wurzel λ_i ($l_i' > 0$, $l_i'' = 0$) gehörigen Hauptpunkte liegen, ist:

$$\tau_i \, q_k^{(j)} \, q_l^{(j)} = \delta_{kl}(\lambda_i). \tag{13}$$

Die Hauptgerade gehört wegen des in § 1, 9 Gesagten zur Wurzel:

$$\rho_j = \lambda_i^2. \tag{14}$$

7. Hauptpunktfelder $l'' > 0$, $l''' = 0$. Schließlich folgt aus § 1, (11) wenn auch alle $\delta_{kl}(\lambda) = 0$ sind, so daß die vier Gleichungen § 1, (11) dieselbe Ebene darstellen:

VII. Für die Hauptebene $u^{(j)}$, die von den zur Wurzel λ_i ($l_i'' > 0$, $l_i''' = 0$) gehörigen Hauptpunkten erfüllt wird, ist:

$$\tau_i \, u_k^{(j)} \, u_l^{(j)} = a_{kl} - \lambda_i \, b_{kl}. \tag{15}$$

Die Hauptebene gehört zur Wurzel

$$\mu_j = \lambda_i^3. \tag{16}$$

8. Ein- und mehrfache Wurzeln $l_i' = 0$. Da sich der erste Differentialquotient von $\Delta(\lambda)$ schreiben läßt (nach § 1, (28)):

$$(17) \qquad -\Delta'(\lambda) = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l b_{kl} \Delta_{kl}(\lambda),$$

so wird nach (12) mit § 1, (32):

$$-\Delta'(\lambda_i) = \tau_i \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l b_{kl} x_k^{(i)} x_l^{(i)} = \tau_i g_{ii}$$

und nach (6):

$$(18) \qquad -\lambda_i \Delta'(\lambda_i) = \tau_i f_{ii} = \tau_i \lambda_i g_{ii} = \tau_i \sum_1^4{}_k u_k^{(i)} x_k^{(i)}.$$

VIII. G e h ö r t z u r W u r z e l λ_i e i n e i n z i g e r, b e s t i m m t e r H a u p t p u n k t $x_k^{(i)}$ u n d e i n e H a u p t e b e n e $u_k^{(i)}$ ($l_i' = 0$), s o l i e g e n b e i d e g e t r e n n t o d e r v e r e i n i g t, j e n a c h d e m λ_i e i n e e i n f a c h e ($l_i = 1$, $\Delta'(\lambda_i) \neq 0$) o d e r m e h r f a c h e W u r z e l ($l_i = 2, 3, 4$) i s t.

9. Zwei- und mehrfache Wurzeln $l_i' > 0$, $l_i'' = 0$. Da sich weiter der zweite Differentialquotient von $\Delta(\lambda)$ schreiben läßt:

$$(19) \qquad {}^1/_2\, \Delta''(\lambda) = \sum_1^6{}_k \sum_1^6{}_l \beta_{\bar{k}\bar{l}} \delta_{kl}(\lambda),$$

so folgt nach (13) und (9):

$${}^1/_2\, \Delta''(\lambda_i) = \tau_i \sum_1^6{}_k \sum_1^6{}_l \beta_{\bar{k}\bar{l}} q_k^{(j)} q_l^{(j)} = \tau_i \psi_{jj}$$

und nach (11):

$$(20) \qquad {}^1/_2\, \rho_j \Delta''(\lambda_i) = \tau_i \varphi_{jj} = \tau_i \rho_j \psi_{jj} = \tau_i \sum_1^6{}_k p_k^{(j)} p_{\bar{k}}'^{(j)},$$

und so ergibt sich:

IX. G e h ö r t z u r W u r z e l λ_i e i n e R e i h e v o n H a u p t p u n k t e n $x_k^{(i)}$ u n d e i n B ü s c h e l v o n H a u p t e b e n e n $u_k^{(i)}$ ($l_i > 1$, $l_i' > 0$, $l_i'' = 0$), s o l i e g e n R e i h e $q^{(j)}$ u n d B ü s c h e l a c h s e $q'^{(j)}$ w i n d s c h i e f o d e r v e r e i n i g t, j e n a c h d e m λ_i e i n e z w e i f a c h e ($l_i = 2$, $\Delta''(\lambda_i) \neq 0$) o d e r m e h r f a c h e W u r z e l ($l_i = 3$, 4) i s t.

Beide sind reziproke Polaren in Bezug auf f und g (Hauptgerade), und zwar für $l_i = 2$ getrennt, für $l_i > 2$ da-

gegen entweder konjugierte Tangenten in ihrem Schnittpunkte oder in eine Erzeugende zusammenfallend.

10. Drei- und vierfache Wurzel $l_i'' > 0$, $l_i''' = 0$. Da sich endlich der dritte Differentialquotient von $\triangle(\lambda)$ auf die Formbringen läßt:

$$(21)\quad -\tfrac{1}{6}\,\triangle'''(\lambda) = \sum_1^4{}_k \sum_1^4{}_l B_{kl}\,(a_{kl} - \lambda b_{kl}),$$

wird nach (15) und (6''):

$$-\tfrac{1}{6}\,\triangle'''(\lambda) = \tau_i \sum_1^4 \sum_1^4 B_{kl}\, u_k^{(j)}\, u_l^{(i)} = \tau_i\, G_{jj}$$

und nach (7):

$$(22) - \tfrac{1}{6}\,\mu^j\,\triangle'''(\lambda) = \tau_i\, F_{jj} = \tau_i\,\mu_i\, G_{jj} = \tau_i\, A \sum_1^4{}_l\, x_l^{(j)}\, u_l^{(j)}.$$

X. Gehört zur Wurzel λ_i ein Feld von Hauptpunkten $x_k^{(i)}$ und ein Bündel von Hauptebenen $u_k^{(i)}$ ($l_i > 2$, $l_i' > 1$, $l_i'' > 0$, $l_i''' = 0$), so liegen Feld $u_k^{(j)}$ und Bündelzentrum $x_k^{(j)}$ getrennt oder vereinigt, je nachdem λ_i eine dreifache ($l_i = 3$, $\Delta'''(\lambda_i) \neq 0$) oder vierfache ($l_i = 4$) Wurzel ist.

Im ersten Falle ist $u^{(j)}$ keine Tangentialebene der Grundflächen ($F_{jj} \neq 0$, $G_{jj} \neq 0$), im zweiten Falle ist $u^{(j)}$ Tangentialebene beider Flächen ($F_{jj} = 0$, $G_{jj} = 0$) in $x^{(j)}$.

Im ersten Falle schneidet die Ebene die Grundfläche f in einem eigentlichen Kegelschnitt, der nach IIc auch auf g liegt und in dessen sämtlichen Punkten sich f und g berühren (vgl. später den Fall I, 4.); im zweiten Falle wird der Kegelschnitt ein Linienpaar, das ebenfalls auf f und g liegt und in dessen Punkten sich f und g berühren (vgl. später den Fall II, 5.)

11. Vierfache Wurzel mit Hauptpunktreihe. Zur drei- oder vierfachen Wurzel λ_i gehört eine Hauptpunktreihe und ein Hauptebenenbüschel, wenn $l_i = 3, 4$, $l_i' = 2, 1$, $l_i'' = 0$ ist. Nach § 2, IX liegen Reihe und Achse vereinigt, wobei aber noch die beiden Möglichkeiten offen bleiben, daß sie nur einen Punkt gemein haben oder ganz zusammenfallen, also konjugierte Tangenten sind oder sich zu einer Erzeugenden vereinigen.

Für die Achsenkoordinaten q der Hauptpunktreihe, die zur Wurzel λ_i ($l_i' > 0$, $l_i'' = 0$) gehört, ist nach § 2, VI, (13):

$$\tau q_k q_l = \delta_{kl}(\lambda_i) \tag{23}$$

wobei die Voraussetzung zu Grunde liegt, daß für die Wurzel λ_i

$$\text{alle } \Delta_{kl}(\lambda) = 0, \tag{24}$$

daß also $\lambda = \lambda_i$ auch eine Wurzel aller $\Delta_{kl}(\lambda)$ ist, oder daß alle $\Delta_{kl}(\lambda)$ durch $\lambda - \lambda_i$ teilbar sind. Je nachdem nun alle $\Delta_{kl}(\lambda)$ nur durch $\lambda - \lambda_i$ oder durch $(\lambda - \lambda_i)^2$ teilbar sind, oder je nachdem λ_i einfache oder zweifache Wurzel aller $\Delta_{kl}(\lambda)$ ist, sind für $\lambda = \lambda_i$ nicht alle oder alle $\Delta'_{kl}(\lambda) = 0$.

Es fragt sich also, was dieser Unterschied geometrisch bedeutet.

12. Die Differentialquotienten $\Delta'_{kl}(\lambda)$. Die Differentialquotienten der Unterdeterminanten 3. Grades, $\Delta_{kl}(\lambda)$, z. B. von

$$\Delta_{12}(\lambda) = -\begin{vmatrix} a_{21} - \lambda b_{21} & a_{23} - \lambda b_{23} & a_{24} - \lambda b_{24} \\ a_{31} - \lambda b_{31} & a_{33} - \lambda b_{33} & a_{34} - \lambda b_{34} \\ a_{41} - \lambda b_{41} & a_{43} - \lambda b_{43} & a_{44} - \lambda b_{44} \end{vmatrix} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} \Delta'_{12}(\lambda) = {} & b_{21}\,\delta_{66}(\lambda) - b_{23}\,\delta_{64}(\lambda) - b_{24}\,\delta_{62}(\lambda) \\ & - b_{31}\,\delta_{56}(\lambda) + b_{33}\,\delta_{54}(\lambda) + b_{34}\,\delta_{52}(\lambda) \\ & + b_{41}\,\delta_{16}(\lambda) - b_{43}\,\delta_{14}(\lambda) - b_{44}\,\delta_{12}(\lambda), \end{aligned} \tag{26}$$

sind lineare homogene Funktionen der Unterdeterminanten 2. Grades $\delta_{kl}(\lambda)$. Es handelt sich also darum, was es bedeutet, daß für eine Wurzel λ_i, für die alle $\Delta_{kl}(\lambda)$, aber nicht alle $\delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, nicht alle oder alle $\Delta'_{kl}(\lambda)$ verschwinden.

Nun folgt aus (26) und (23):

$$\begin{aligned} \Delta'_{12}(\lambda_i) = -\tau\,(& b_{21}\,q_6\,q_6 - b_{23}\,q_6\,q_4 - b_{24}\,q_6\,q_2 \\ & - b_{31}\,q_5\,q_6 + b_{33}\,q_5\,q_4 + b_{34}\,q_5\,q_2 + b_{41}\,q_1\,q_6 - b_{43}\,q_1\,q_4 - b_{44}\,q_1\,q_2) \end{aligned} \tag{27}$$

oder, wenn u und u' zwei durch q gehende Ebenen sind:

$$\Delta'_{12}(\lambda_i) = \tau \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} & b_{24} & u_2 & u'_2 \\ b_{31} & b_{33} & b_{34} & u_3 & u'_3 \\ b_{41} & b_{43} & b_{44} & u_4 & u'_4 \\ u_1, & u_3, & u_4, & 0 & 0 \\ u_1 & u_3 & u_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\tau\,B_{12}^{u\,u'}, \tag{28}$$

und so allgemein (Staude, Crelle's Journal Bd. 156)

$$\Delta'_{kl}(\lambda_i) = -\tau\,B_{kl}^{u\,u'}, \tag{29}$$

wo $B_{kl}^{uu'}$ die Unterdeterminanten von b_{kl} in der zweifach geränderten Determinante B sind.

Die Gleichungen

$$B_{kl}^{uu'} \neq 0 \ (\text{nicht alle} = 0) \qquad \text{und } B_{kl}^{uu'} = 0 \ (\text{alle} = 0) \tag{30}$$

sind aber [nach Staude, Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes u. der Fläche 2. Ordnung, II, § 142, (18); (19)] die Bedingungen dafür, daß $q = u \times u'$ nicht ganz oder als Erzeugende ganz der Fläche g angehört.

13. Der Unterschied zwischen $l_i' = 2$ und $l_i' = 1$ bei $l_i'' = 0$. Dann nur dann, wenn für die Wurzel $\lambda = \lambda_i$ nicht nur alle $\Delta_{kl}(\lambda)$, sondern auch alle $\Delta'_{kl}(\lambda)$ verschwinden, also der Faktor $(\lambda - \lambda_i)^2$ in allen $\Delta_{kl}(\lambda)$ vorkommt, während nicht alle $\delta_{kl}(\lambda_i)$ verschwinden, ist die zu λ_i gehörige Hauptpunktreihe eine Erzeugende der Fläche g und damit nach § 2, IIc auch der Fläche f. Sie fällt daher mit der Achse des zu λ_i gehörigen Hauptebenenbüschels, die ja die reziproke Polare der Hauptpunktreihe ist, ganz zusammen. Damit ist die zu Anfang von 11 aufgeworfene Frage beantwortet und schließt sich an Satz IX die weitere Unterscheidung an:

XI. Gehört zur Wurzel λ_i eine Reihe von Hauptpunkten und ein Büschel von Hauptebenen ($l_i = 3,4$; $l_i' = 1,2$; $l_i'' = 0$) so haben Reihe $q^{(i)}$ und Büschelachse $q'^{(i)}$ bei ihrer nach IX vereinigten Lage nur einen Punkt oder alle Punkte gemein, je nachdem $l_i' = 1$ oder $l_i' = 2$ ist. (Staude, Journal f. Math., Bd. 156, S. 4)

Als reziproke Polaren sind $q^{(i)}$ und $q'^{(i)}$ im ersten Falle konjugierte Tagenten von f und g, während sie im zweiten Falle in eine gemeinsame Erzeugende beider Flächen zusammenfallen.

14. Auftreten in der Tabelle § 1, 11. Bei einer dreifachen Wurzel ($l_i = 3$) kommt nun $l_i'' = 0$ nach § 1, 11 nur im Falle $l_i' = 1$ vor, es ist der Fall II, 4.

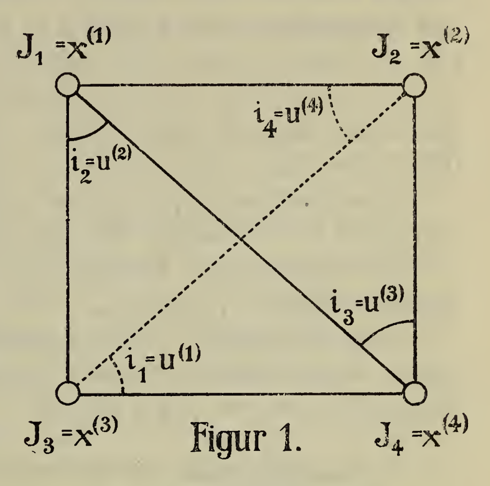
XII. Daher haben im Falle II, 4 Hauptpunktreihe und Hauptebenenbüschel einen und nur einen Punkt gemein.

Dagegen zeigt die Tabelle § 1, 11 für $l_i = 4$, $l_i'' = 0$ die beiden Möglichkeiten $l_i' = 2$ und $l_i' = 1$, es sind die Fälle III, 5 und IV, 5.

XIII. Daher fallen im Falle III, 5 Hauptpunktreihe und Hauptebenenbüschelachse ganz zusammen, während sie im Falle IV, 5 nur einen Punkt gemein haben.

§ 3. Die Fälle I.

1. Hauptpunkte und Hauptebenen im Falle I, 1. Zu den einfachen Wurzeln $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4$ der Gleichung $\Delta(\lambda) = 0$ gehören je ein Hauptpunkt $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})$ und eine Hauptebene $(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, u^{(4)})$. Da hier $x^{(i)}$ und $u^{(i)}$ nach § 2, 8, VIII stets getrennt, aber $x^{(i)}$ und $u^{(j)}$ $(i \neq j)$ nach § 1, IV stets vereinigt liegen müssen, muß jedes $x^{(i)}$ außerhalb der durch die drei übrigen $x^{(i)}$ gebildeten Ebene liegen. Das Tetraeder, das die vier Hauptpunkte (und zugleich die vier Hauptebenen) somit bilden, wählen wir als Koordinatentetraeder:



Figur 1.

$$J_1 = x^{(1)}, \qquad J_2 = x^{(2)}, \qquad J_3 = x^{(3)}, \qquad J_4 = x^{(4)};$$
$$i_1 = u^{(1)}, \qquad i_2 = u^{(2)}, \qquad i_3 = u^{(3)}, \qquad i_4 = u^{(4)}.$$

Für dieses Tetraeder muß dann nach § 2, (4) für die Koeffizienten § 1, (32) der Gleichungen § 1, (31) gelten:

$$(1) \qquad f_{ij} = 0; \qquad g_{ij} = 0 \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ j = 1, 2, 3, 4 \end{matrix} \qquad i \neq j$$

und

$$(2) \qquad f_{ii} = \lambda_i\, g_{ii} \neq 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

2. Kanonische Gleichungen. Dadurch reduzieren sich die linken Seiten der Gleichungen § 1, (31) auf Quadratsummen:

$$(3) \qquad \begin{cases} f = \lambda_1 g_{11}\, y_1^2 + \lambda_2 g_{22}\, y_2^2 + \lambda_3 g_{33}\, y_3^2 + \lambda_4 g_{44}\, y_4^2 = 0 \\ g = g_{11}\, y_1^2 + g_{22}\, y_2^2 + g_{33}\, y_3^2 + g_{44}\, y_4^2 = 0, \end{cases}$$

und die Büschelgleichung wird:

$$(4) \qquad f - \lambda g = (\lambda_1 - \lambda)\, g_{11}\, y_1^2 + (\lambda_2 - \lambda)\, g_{22}\, y_2^2 + (\lambda_3 - \lambda)\, g_{33}\, y_3^2 + (\lambda_4 - \lambda)\, g_{44}\, y_4^2 = 0$$

Die Determinante des Büschels (4) ist:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda_1 - \lambda)\, g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda)\, g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3 - \lambda)\, g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_4 - \lambda)\, g_{44} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Die Beziehungen zwischen Pol und Polarebene bei beiden Flächen lauten:

$$\begin{cases} \upsilon_1 = \lambda_1\, g_{11}\, y_1, & \upsilon_2 = \lambda_2\, g_{22}\, y_2, \quad \upsilon_3 = \lambda_3\, g_{33}\, y_3, \quad \upsilon_4 = \lambda_4\, g_{44}\, y_4; \\ \upsilon_1 = g_{11}\, y_1, & \upsilon_2 = g_{22}\, y_2, \quad \upsilon_3 = g_{33}\, y_3, \quad \upsilon_4 = g_{44}\, y_4. \end{cases} \tag{6}$$

Die Bedingungen für die Hauptpunkte:

$$(\lambda_1 - \lambda)\, g_{11}\, y_1 = 0, \quad (\lambda_2 - \lambda)\, g_{22}\, y_2 = 0, \quad (\lambda_3 - \lambda)\, g_{33}\, y_3 = 0, \quad (\lambda_4 - \lambda)\, g_{44}\, y_4 = 0 \tag{7}$$

geben mit Rücksicht auf (6) zu:

$$\lambda = \lambda_1 : J_1, i_1; \quad \lambda = \lambda_2 : J_2, i_2; \quad \lambda = \lambda_3 : J_3, i_3; \quad \lambda = \lambda_4 : J_4, i_4. \tag{8}$$

Das Tetraeder $J_1 J_2 J_3 J_4$ ist gemeinsames Polartetraeder der beiden Flächen f und g.

Das Büschel (4) enthält vier eigentliche Kegel mit den Spitzen J_1, J_2, J_3, J_4.

Die Grundkurve ist als Durchschnitt zweier Kegel, die keine Gerade gemein haben, eine nicht entartete Raumkurve 4. Ordnung.

3. Hauptgerade. Zwischen reziproken Polaren in bezug auf f und g bestehen die Beziehungen:

$$\begin{cases} r_1' = \lambda_1 \lambda_4\, g_{11}\, g_{44}\, r_4 \\ r_2' = \lambda_2 \lambda_4\, g_{22}\, g_{44}\, r_5 \\ r_3' = \lambda_3 \lambda_4\, g_{33}\, g_{44}\, r_6 \\ r_4' = \lambda_2 \lambda_3\, g_{22}\, g_{33}\, r_1 \\ r_5' = \lambda_3 \lambda_1\, g_{33}\, g_{11}\, r_2 \\ r_6' = \lambda_1 \lambda_2\, g_{11}\, g_{22}\, r_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1' = g_{11}\, g_{44}\, r_4 \\ r_2' = g_{22}\, g_{44}\, r_5 \\ r_3' = g_{33}\, g_{44}\, r_6 \\ r_4' = g_{22}\, g_{33}\, r_1 \\ r_5' = g_{33}\, g_{11}\, r_2 \\ r_6' = g_{11}\, g_{22}\, r_3, \end{cases} \tag{9}$$

so daß die Bedingungen der Hauptgeraden werden:

$$\begin{cases} g_{11}\, g_{44}\, (\lambda_1 \lambda_4 - \rho)\, r_4 = 0, \quad g_{22}\, g_{44}\, (\lambda_2 \lambda_4 - \rho)\, r_5 = 0, \\ \qquad g_{33}\, g_{44}\, (\lambda_3 \lambda_4 - \rho)\, r_6 = 0, \\ g_{22}\, g_{33}\, (\lambda_2 \lambda_3 - \rho)\, r_1 = 0, \quad g_{33}\, g_{11}\, (\lambda_3 \lambda_1 - \rho)\, r_2 = 0, \\ \qquad g_{11}\, g_{22}\, (\lambda_1 \lambda_2 - \rho)\, r_3 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Sie geben zu:

$$\begin{cases} \rho = \rho_1 = \lambda_2 \lambda_3 : \text{Kante } J_2 J_3, \quad \rho = \rho_2 = \lambda_3 \lambda_1 : \text{Kante } J_3 J_1, \\ \qquad \rho = \rho_3 = \lambda_1 \lambda_2 : \text{Kante } J_1 J_2, \\ \rho = \rho_4 = \lambda_1 \lambda_4 : \text{Kante } J_1 J_4, \quad \rho = \rho_5 = \lambda_2 \lambda_4 : \text{Kante } J_2 J_4, \\ \qquad \rho = \rho_6 = \lambda_3 \lambda_4 : \text{Kante } J_3 J_4, \end{cases} \tag{11}$$

also zu je zwei reziproken Wurzeln zwei gegenüberliegende Kanten des Tetraeders als reziproke Polaren in bezug auf beide Flächen f und g.

4. Hauptpunkte und -Ebenen und kanonische Gleichungen im Falle I, 2. Zu der Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_3$ ($l_1 = 2$, $l_1' = 1$) gehört eine Reihe von Hauptpunkten $x^{(1)} \dots x^{(3)}$ und ein Büschel von Hauptebenen $u^{(1)} \dots u^{(3)}$. Reihe und Büschelachse liegen nach § 2, 9, IX windschief. Die zu den einfachen Wurzeln λ_2 und λ_4 gehörigen Hauptpunkte $x^{(2)}$ und $x^{(4)}$ liegen nach § 1, IV mit der Büschelachse vereinigt, die entsprechenden Hauptebenen $u^{(2)}$ und $u^{(4)}$ gehen nach § 1, IV durch die Punktreihe. Es geht $u^{(2)}$ nach § 1, IV durch $x^{(4)}$, aber nach § 2, VIII nicht durch $x^{(2)}$; ebenso geht $u^{(4)}$ durch $x^{(2)}$, aber nicht durch $x^{(4)}$. Also ist $u^{(2)}$ die Verbindungsebene der Reihe mit $x^{(4)}$ und $u^{(4)}$ die Verbindungsebene der Reihe mit $x^{(2)}$. Wir nehmen für das neue Tetraeder die Hauptpunkte $x^{(2)}$ und $x^{(4)}$ als Ecken J_2 und J_4, die Hauptebenen $u^{(2)}$ und $u^{(4)}$ als Seitenflächen i_2 und i_4. Da die Hauptpunktreihe $x^{(1)} \dots x^{(3)}$ ihre reziproke Polare in bezug auf f und g, die Büschelachse, nicht schneidet, kann sie nicht Tangente an f und g sein, sondern muß f in zwei g e t r e n n t e n Punkten J_1^0 und J_3^0 schneiden, die als Hauptpunkte auch auf g liegen. Wir nehmen zwei zu J_1^0 und J_3^0 harmonische Punkte $x^{(1)}$ und $x^{(3)}$ der Reihe als Ecken J_1 und J_3. Die ihnen entsprechenden Hauptebenen des Büschels sind dann $i_1 = J_2 J_3 J_4$ und $i_3 = J_2 J_4 J_1$. Das so bestimmte Tetraeder ist wieder ein gemeinsames Polartetraeder beider Flächen, so daß wieder die Bedingungen (1) und (2) und die kanonischen Gleichungen (3) gelten, nur mit $\lambda_1 = \lambda_3$.

5. Entartete Flächen und Grundkurve. Das Büschel enthält für $\lambda = \lambda_2$ und $\lambda = \lambda_4$ wieder zwei eigentliche Kegel mit den Spitzen J_2 und J_4. Für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_3$ enthält es das E b e n e n p a a r

$$f - \lambda_1 g = (\lambda_2 - \lambda_1)\, g_{22}\, y_2^2 + (\lambda_4 - \lambda_1)\, g_{44}\, y_4^2 = 0, \tag{12}$$

dessen Achse $J_1 J_3$ die beiden Flächen (3) in dem Hauptpunktepaar

$$g_{11}\, y_1^2 + g_{33}\, y_3^2 = 0, \; y_2 = 0, \; y_4 = 0, \tag{13}$$

den Punkten J_1^0, J_3^0 schneidet. Die Grundkurve, als Durchschnitt der Fläche g und des Ebenenpaares (12), besteht aus zwei in den Ebenen (12) liegenden Kegelschnitten, die das Punktepaar (13) gemein haben.

6. Hauptgerade. Als Hauptgerade ergeben sich aus (10) für:

$$(14)\quad \begin{cases} \rho = \rho_1 = \rho_3 = \lambda_1 \lambda_2 : r_2 = 0, \quad r_4 = 0, \quad r_5 = 0, \quad r_6 = 0; \\ y_4 = 0, \quad r_1 y_1 + r_3 y_3 = 0 : \text{alle Geraden in } {}_4 \text{ durch } J_2; \\ \rho = \rho_4 = \rho_6 = \lambda_1 \lambda_4 : r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_5 = 0; \\ y_2 = 0, \quad r_6 y_1 - r_4 y_3 = 0 : \text{alle Geraden in } i_2 \text{ durch } J_4; \\ \rho = \rho_2 = \lambda_1^2 : \text{Kante } J_3 J_1; \qquad \rho = \rho_5 = \lambda_2 \lambda_4 : \text{Kante } J_2 J_4. \end{cases}$$

Wie bei (11) entsprechen sich je zwei gegenüber liegende Kanten des Tetraeders gegenseitig als Hauptgerade.

7. Andere Wahl der Ecken J_1, J_3 bei I, 2. Wir können nun die als harmonische Punkte zu J_1^0 und J_3^0 gewählten Ecken J_1 und J_3 auch in die Schnittpunkte J_1^0 und J_3^0 der Hauptpunktreihe mit f und g selbst legen. Die diesen Hauptpunkten entsprechenden Ebenen des Büschels, die gemeinsame Tangentialebenen von f und g in $J_1 = J_1^0$ und $J_3 = J_3^0$ sind, nehmen wir dann als Ebenen i_3 und i_1 des Tetraeders. Dann sind J_1 und J_3 zwei Punkte der Flächen f und g, es ist die Kante $J_2 J_4$, als Durchschnitt der Tangentialebenen i_3 und i_1 in J_1 und J_3, die reziproke Polare der Kante $J_1 J_3$, und J_2 und J_4 sind wie bei der früheren Wahl des Tetraeders harmonische Pole in bezug auf f und g. Damit ist aber das neue Tetraeder ein Polarberührungstetraeder[1]) beider Flächen, und da jetzt die Angaben (1) und (2) durch

$$(15)\begin{cases} f_{11} = \lambda_1 g_{11} = 0, \quad f_{22} = \lambda_2 g_{22} \neq 0, \quad f_{33} = \lambda_1 g_{33} = 0, \quad f_{44} = \lambda_4 g_{44} \neq 0; \\ f_{13} = \lambda_1 g_{13} \neq 0, \quad \text{sonst } f_{ij} = l_i g_{ij} = 0 \text{ für } j \neq i \end{cases}$$

zu ersetzen sind, werden die Gleichungen die beiden Flächen und des Büschels:

$$(16)\quad \begin{cases} f = \lambda_2 g_{22} y_2^2 + \lambda_4 g_{44} y_4^2 + 2 \lambda_1 g_{31} y_3 y_1 = 0, \\ g = g_{22} y_2^2 + g_{44} y_4^2 + 2 g_{31} y_3 y_1 = 0, \end{cases}$$

$$(17)\quad f - \lambda g = (\lambda_2 - \lambda) g_{22} y_2^2 + (\lambda_4 - \lambda) g_{44} y_4^2 + 2 (\lambda_1 - \lambda) g_{31} y_3 y_1 = 0.$$

---

[1]) Vgl. Staude, Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche 2. Ordnung, Bd. II, S. 901.

Weiter werden die Polarbeziehungen:

$$(18)\quad \begin{cases} v_1 = \lambda_1 g_{13} y_3, & v_2 = \lambda_2 g_{22} y_2, \quad v_3 = \lambda_1 g_{31} y_1, \quad v_4 = \lambda_4 g_{44} y_4; \\ v_1 = g_{13} y_3, & v_2 = g_{22} y_2, \quad v_3 = g_{31} y_1, \quad v_4 = g_{44} y_4, \end{cases}$$

und die Bedingungen der Hauptpunkte:

$$(19)\quad g_{13}(\lambda_1 - \lambda) y_3 = 0, \quad g_{22}(\lambda_2 - \lambda) g_2 = 0, \quad g_{31}(\lambda_1 - \lambda) y_1 = 0,$$
$$g_{44}(\lambda_4 - \lambda) y_4 = 0.$$

Sie geben wieder die Hauptelemente des Falles I, 2. Das Ebenenpaar behält die Gleichung (12), seine Achse $J_1 J_3$ schneidet die beiden Flächen in dem Hauptpunktepaar $J_1 J_3$, in dem sich die Flächen berühren.

8. Hauptgerade. Die Beziehungen zwischen reziproken Polaren der Flächen (16) werden:

$$(20)\quad \begin{cases} \begin{cases} r_1' = \lambda_1 \lambda_4 g_{13} g_{44} r_6, \quad r_2' = \lambda_2 \lambda_4 g_{22} g_{44} r_5, \quad r_3' = \lambda_1 \lambda_4 g_{31} g_{44} r_4, \\ r_4' = -\lambda_1 \lambda_2 g_{31} g_{22} r_3, \quad r_5' = -\lambda_1^2 g_{13} g_{31} r_2, \quad r_6' = -\lambda_1 \lambda_2 g_{22} g_{13} r_1; \end{cases} \\ \begin{cases} r_1' = g_{13} g_{44} r_6, \quad r_2' = g_{22} g_{44} r_5, \quad r_3' = g_{31} g_{44} r_4, \\ r_4' = -g_{31} g_{22} r_3, \quad r_5' = -g_{13} g_{31} r_2, \quad r_6' = -g_{22} g_{13} r_1 \end{cases} \end{cases}$$

und die Bedingungen der Hauptgeraden:

$$(21)\quad \begin{cases} g_{13} g_{44} (\lambda_1 \lambda_4 - \rho) r_6 = 0, \quad g_{22} g_{44} (\lambda_2 \lambda_4 - \rho) r_5 = 0, \\ g_{31} g_{44} (\lambda_1 \lambda_4 - \rho) r_4 = 0, \\ -g_{31} g_{22} (\lambda_1 \lambda_2 - \rho) r_3 = 0, \quad -g_{13} g_{31} (\lambda_1^2 - \rho) r_2 = 0, \\ -g_{22} g_{13} (\lambda_1 \lambda_2 - \rho) r_1 = 0. \end{cases}$$

Sie geben wieder die Hauptgeraden (14), nur entsprechen sich jetzt $J_3 J_1$ und $J_2 J_4$ als reziproke Polaren, aber $J_2 J_3$ und $J_3 J_4$, $J_1 J_2$ und $J_1 J_4$ als konjungierte Tangenten.

9. Hauptpunkte und -Ebenen im Falle I, 3. Zu der Doppelwurzel $\lambda_1 = \lambda_3$ ($l_1 = 2$, $l_1' = 1$) gehört eine Reihe von Hauptpunkten $x^{(1)} \ldots x^{(3)}$ und ein Büschel von Hauptebenen $u^{(1)} \ldots u^{(3)}$; zur Doppelwurzel $\lambda_2 = \lambda_4$ ($l_2 = 2$, $l_2' = 1$) gehört ebenso eine Hauptpunktreihe $x^{(2)} \ldots x^{(4)}$ und ein Hauptebenenbüschel $u^{(2)} \ldots u^{(4)}$. Reihe und Büschelachse liegen nach § 2, IX jedesmal windschief. Da nach § 1, IV alle Hauptpunkte $x^{(1)} \ldots x^{(3)}$ mit allen Hauptebenen $u^{(2)} \ldots u^{(4)}$, ebenso alle Hauptpunkte $x^{(2)} \ldots x^{(4)}$ mit allen Hauptebenen $u^{(1)} \ldots u^{(3)}$ vereinigt liegen, fällt die erste Punktreihe mit der zweiten Büschelachse zusammen, und ebenso die zweite Punktreihe mit der ersten Büschelachse.

Wie unter § 3, 4 muß die Hauptpunktreihe $x^{(1)} \ldots x^{(3)}$ die Fläche f in zwei g e t r e n n t e n Punkten J_1^0, J_3^0 schneiden,

die als Hauptpunkte zugleich auf g liegen. Wir wählen zwei zu J_1^0 und J_3^0 harmonische Punkte der Reihe als J_1 und J_3. Ebenso muß die Hauptpunktreihe $x^{(2)} \ldots x^{(4)}$ die Fläche f in zwei getrennten Punkten J_2^0, J_4^0 schneiden, die als Hauptpunkte auch auf g liegen. Zwei zu J_2^0 und J_4^0 harmonische Punkte dieser Reihe nehmen wir als J_2 und J_4. Den Punkten J_1, J_3 entsprechen dann die Hauptebenen $i_1 = J_2\,J_4\,J_3$ und $i_3 = J_2\,J_4\,J_1$, den Punkten J_2, J_4 die Hauptebenen $i_2 = J_1\,J_3\,J_4$ und $i_4 = J_1\,J_3\,J_2$. Das Tetraeder $J_1\,J_2\,J_3\,J_4$ ist wieder gemeinsames Polartetraeder beider Flächen, so daß auch hier die Bedingungen (1), (2) und die kanonischen Gleichungen (3) und (4) gelten, mit $\lambda_1 = \lambda_3$ und $\lambda_2 = \lambda_4$.

Aus (6) und (7) folgt in der Tat auch für

(22) $\lambda = \lambda_1 = \lambda_3 : J_1 \ldots J_3,\ i_1 \ldots i_3; \quad \lambda = \lambda_2 = \lambda_4 : J_2 \ldots J_4,\ i_2 \ldots i_4.$

10. Grundkurve und Hauptgerade. Das Büschel (4) enthält die beiden Ebenenpaare

(23) $f - \lambda_1 g = g_{22}\,y_2^2 + g_{44}\,y_4^2 = 0; \qquad f - \lambda_2 g = g_{11}\,y_1^2 + g_{31}\,y_3^2,$

die ein windschiefes Viereck, die Grundkurve des Büschels, gemein haben. Aus (10) endlich ergeben sich die Hauptgeraden für:

(24) $\begin{cases} \rho = \rho_1 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_6 = \lambda_1\,\lambda_2 : r_2 = 0,\ r_5 = 0, \text{ alle } \infty^3 \text{ Transversalen der Kanten } J_3\,J_1 \text{ und } J_2\,J_4; \\ \rho = \rho_2 = \lambda_1^2 : \text{Kante } J_3\,J_1; \qquad \rho = \rho_5 = \lambda_2^2 : \text{Kante } J_2\,J_4. \end{cases}$

Je zwei gegenüberliegende der sechs Kanten sind einander entsprechende Hauptgerade.

11. Zweite Gleichungsform des Falles I, 3. Legt man dagegen die Ecken J_1 und J_3 nicht harmonisch zu J_1^0 und J_3^0, sondern in J_1^0 und J_3^0 hinein, so wird das neue Tetraeder wie bei (15) ein gemeinsames Polarberührungstetraeder der beiden Flächen, und dann gelten wieder die kanonischen Gleichungen (17) und (18), nur mit $\lambda_2 = \lambda_4$. In der Tat geben dann die Gleichungen (19), (18) für:

(25) $\lambda = \lambda_1 : J_1 \ldots J_3,\ i_1 \ldots i_3; \qquad \lambda = \lambda_2 = \lambda_4 : J_2 \ldots J_4,\ i_2 \ldots i_4.$

Die aus (21) folgenden Hauptgeraden sind dieselben wie in (24); aber es entsprechen sich gegenseitig $J_3\,J_1$ und $J_2\,J_4$, $J_2\,J_3$ und $J_3\,J_4$, $J_1\,J_2$ und $J_1\,J_4$.

12. Dritte Form des Falles I, 3. Wir können endlich die Ecken J_1, J_3, J_2, J_4 in die Schnittpunkte J_1^0, J_3^0, J_2^0, J_4^0 der beiden Hauptpunktreihen mit den Flächen f und g legen, wodurch das neue Tetraeder bestimmt ist. Die den Hauptpunkten J_1, J_2, J_3, J_4 entsprechenden Hauptebenen sind dann die Tangentialebenen der Flächen f und g in diesen Punkten, und die einem Punkte der einen Hauptpunktreihe entsprechende Ebene geht durch die andre Reihe. Dann gelten also nach § 2, (4) die Angaben der folgenden Übersicht:

$$(26)\quad \begin{cases} \left.\begin{array}{l} J_1 \text{ Hp. zu } \lambda_1 \\ i_3 \text{ He. zu } J_1 \end{array}\right\} : \begin{array}{c} J_1 \text{ in } i_3: \quad J_2 \text{ in } i_3: \quad J_3 \text{ nicht in } i_3: \\ f_{11} = \lambda_1 g_{11} = 0, \quad f_{12} = \lambda_1 g_{12} = 0, \quad f_{13} = \lambda_1 g_{13} \neq 0, \\ J_4 \text{ in } i_3 : f_{14} = \lambda_1 g_{14} = 0; \end{array} \\ \left.\begin{array}{l} J_2 \text{ Hp. zu } \lambda_2 \\ i_4 \text{ He. zu } J_2 \end{array}\right\} : \begin{array}{c} J_1 \text{ in } i_4: \quad J_2 \text{ in } i_4: \quad J_3 \text{ in } i_4: \\ f_{21} = \lambda_2 g_{21} = 0, \quad f_{22} = \lambda_2 g_{22} = 0, \quad f_{23} = \lambda_2 g_{23} = 0, \\ J_4 \text{ nicht in } i_4 : f_{24} = \lambda_2 g_{24} \neq 0; \end{array} \\ \left.\begin{array}{l} J_3 \text{ Hp. zu } \lambda_3 \\ i_1 \text{ He. zu } J_3 \end{array}\right\} : \begin{array}{c} J_1 \text{ nicht in } i_1: \quad J_2 \text{ in } i_1: \quad J_3 \text{ in } i_1: \\ f_{31} = \lambda_1 g_{31} \neq 0, \quad f_{32} = \lambda_1 g_{32} = 0, \quad f_{33} = \lambda_1 g_{33} = 0, \\ J_4 \text{ in } i_1 : f_{34} = \lambda_1 g_{34} = 0; \end{array} \\ \left.\begin{array}{l} J_4 \text{ Hp. zu } \lambda_4 \\ i_2 \text{ He. zu } J_4 \end{array}\right\} : \begin{array}{c} J_1 \text{ in } i_2: \quad J_2 \text{ nicht in } i_2: \quad J_3 \text{ in } i_2: \\ f_{41} = \lambda_2 g_{41} = 0, \quad f_{42} = \lambda_2 g_{42} \neq 0, \quad f_{43} = \lambda_2 g_{43} = 0, \\ J_4 \text{ in } i_2 : f_{44} = \lambda_2 g_{44} = 0. \end{array} \end{cases}$$

Damit werden die kanonischen Gleichungen:

$$(27)\quad \begin{cases} f = 2\lambda_1 g_{31} y_3 y_1 + 2\lambda_2 g_{24} y_2 y_4 = 0 \\ g = 2 g_{31} y_3 y_1 + 2 g_{24} y_2 y_4 = 0 \end{cases}$$

$$(28)\quad f - \lambda g = 2(\lambda_1 - \lambda) g_{31} y_3 y_1 + 2(\lambda_2 - \lambda) g_{24} y_2 y_4 = 0.$$

Das Koordinatentetraeder ist ein gemeinsames Schmiegungstetraeder[1]) der beiden Flächen. Die beiden Ebenenpaare $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ des Büschels sind

$$(29)\quad y_2 y_4 = 0, \qquad y_3 y_1 = 0,$$

es sind die vier Tetraederflächen. Die Grundkurve besteht aus dem windschiefen Viereck der vier Kanten $J_1 J_2$, $J_2 J_3$, $J_3 J_4$, $J_4 J_1$.

12. Hauptelemente. Die Beziehungen zwischen Pol und Polarebene in bezug auf beide Flächen (27) sind:

$$(30)\quad \begin{cases} \upsilon_1 = \lambda_1 g_{13} y_3, \quad \upsilon_2 = \lambda_2 g_{24} y_4, \quad \upsilon_3 = \lambda_1 g_{31} y_1, \quad \upsilon_4 = \lambda_2 g_{42} y_2; \\ \upsilon_1 = g_{13} y_3, \quad \upsilon_2 = g_{24} y_4, \quad \upsilon_3 = g_{31} y_1, \quad \upsilon_4 = g_{42} y_2. \end{cases}$$

und die Bedingungen der Hauptpunkte:

---

[1]) Vgl. Staude, Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche 2. Ordnung, Bd. II, S. 907.

$$(31)\quad \begin{cases} g_{13}(\lambda_1-\lambda)y_3=0,\ \ g_{24}(\lambda_2-\lambda)y_4=0,\ \ g_{31}(\lambda_1-\lambda)y_1=0,\\ \qquad\qquad g_{42}(\lambda_2-\lambda)y_2=0, \end{cases}$$

aus denen wieder die Folgerung (22) hervorgeht.

Die Beziehungen zwischen reziproken Polaren sind:

$$(32)\quad \begin{cases} \begin{cases} r_1'=\lambda_1\lambda_2 g_{42}g_{31}r_1, & r_2'=\lambda_2^2 g_{42}g_{24}r_5, & r_3'=-\lambda_1\lambda_2 g_{31}g_{42}r_3,\\ r_4'=\lambda_1\lambda_2 g_{31}g_{24}r_4, & r_5'=\lambda_1^2 g_{13}g_{31}r_2, & r_6'=-\lambda_1\lambda_2 g_{13}g_{24}r_6; \end{cases}\\ \begin{cases} r_1'=g_{42}g_{31}r_1, & r_2'=g_{42}g_{24}r_5, & r_3'=-g_{31}g_{42}r_3,\\ r_4'=g_{31}g_{24}r_4, & r_5'=g_{13}g_{31}r_2, & r_6'=-g_{13}g_{24}r_6 \end{cases} \end{cases}$$

und die Bedingungen der Hauptgeraden:

$$(33)\quad \begin{cases} g_{42}g_{31}(\lambda_1\lambda_2-\rho)r_1=0, \qquad g_{42}g_{24}(\lambda_2^2-\rho)r_5=0,\\ \qquad -g_{31}g_{42}(\lambda_1\lambda_2-\rho)r_3=0,\\ g_{42}g_{31}(\lambda_1\lambda_2-\rho)r_4=0, \qquad g_{31}g_{13}(\lambda_1^2-\rho)r_2=0,\\ \qquad -g_{13}g_{24}(\lambda_1\lambda_2-\rho)r_6=0. \end{cases}$$

Hieraus folgen wieder die Angaben (24). Die Kanten $J_3 J_1$ und $J_2 J_4$ entsprechen sich als reziproke Polaren gegenseitig. Von den gemeinsamen Transversalen dieser Kanten entsprechen sich nach (32) $r_1, 0, r_3, r_4, 0, r_6$ und $r_1, 0, -r_3, r_4, 0, -r_6$. Nur die unter diesen Transversalen enthaltenen Kanten $J_2 J_3$, $J_1 J_2$, $J_1 J_4$, $J_3 J_4$ entsprechen je sich selbst und sind deshalb gemeinsame Erzeugende beider Flächen (27).

13. Hauptpunkte und -Ebenen im Falle I, 4. Im Falle I,4 endlich gehört zur dreifachen Wurzel $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ ($l_1'=2$, $l_1''=1$) ein Feld von Hauptpunkten $x^{(1)}\ldots x^{(2)}\ldots x^{(3)}$ und ein Bündel von Hauptebenen $u^{(1)}\ldots u^{(2)}\ldots u^{(3)}$; nach § 2, X liegt die Feldebene vom Bündelmittelpunkte getrennt. Dabei müssen wegen § 1, IV Feldebene und Bündelmittelpunkt die zur einfachen Wurzel λ_4 $(\neq\lambda_1)$ gehörigen Hauptelemente $u^{(4)}$ und $x^{(4)}$ sein.

Für das neue Tetraeder wählen wir

$$u^{(4)}=i_4 \text{ und } x^{(4)}=J_4.$$

Weil das Hauptpunktefeld vom Bündelmittelpunkt getrennt liegt, kann es nicht Tangentialebene an f und g sein, muß also f in einem *eigentlichen* Kegelschnitt schneiden, der zugleich g angehört, da er aus Hauptpunkten besteht. Wir wählen einen beliebigen, nicht auf diesem Kegelschnitt gelegenen Punkt $x^{(2)}$ des Punktefeldes als J_2 und seine durch J_4 gehende Polarebene $u^{(2)}$ als i_2. Der Kegelschnitt wird von der Schnittlinie $i_2 \times i_4$ in zwei Punkten J_1^0, J_3^0 geschnitten.

Zwei zu $J_1^0\ J_3^0$ harmonische Punkte dieser Schriftlinie $i_2 \times i_4$ nehmen wir dann also die Eckpunkte J_1 und J_3. Dann sind die ihnen entsprechenden Hauptebenen des Bündels die Ebenen $i_1 = J_4 J_2 J_3$ und $i_3 = J_4 J_1 J_2$. Somit ist $J_1 J_2 J_3 J_4$ wieder ein gemeinsames Polartetraeder aller Flächen des Flächenbüschels, und es gelten wieder die Angaben (1), (2) und (3), nur mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Das Büschel (4) enthält die Doppelebene:

$$f - \lambda_1 g = (\lambda_4 - \lambda_1)\, g_{44}\, y_4^2 = 0, \tag{34}$$

und die Grundkurve besteht aus dem genannten Kegelschnitt, der doppelt zählt.

Die Gleichungen (7) geben dann in der Tat für:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 : J_1 \ldots J_2 \ldots J_3,\ i_1 \ldots i_2 \ldots i_3; \qquad \lambda = \lambda_4 : J_4,\ i_4. \tag{35}$$

14. Hauptgerade. Als Hauptgerade ergeben sich aus (10) für:

$$\left\{ \begin{array}{c} \rho = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \lambda_1^2 : \quad r_4 = 0,\ r_5 = 0,\ r_6 = 0; \\ y_3 = 0,\ r_1 y_1 + r_2 y_2 + r_3 r_3 = 0; \\ \rho = \rho_4 = \rho_5 = \rho_6 = \lambda_1 \lambda_4 : \quad r_1 = 0,\ r_2 = 0,\ r_3 = 0; \\ y_1 : y_2 : y_3 = r_4 : r_5 : r_6, \end{array} \right. \tag{36}$$

alle ∞^2 Geraden in i_4 und alle ∞^2 Geraden durch J_4.

Die reziproke Polare r' der Hauptgeraden $r = r_1, r_2, r_3, 0, 0, 0$ ist nach (9):

$$r_1' = 0,\ r_2' = 0,\ r_3' = 0,\ r_4 = g_{22} g_{33} r_1,\ r_5' = g_{33} g_{11} r_2,\ r_6' = g_{11} g_{22} r_3$$

oder

$$y_1 : y_2 : y_3 = g_{22}\, g_{33}\, r_1 : g_{33}\, g_{11}\, r_2 : g_{11}\, g_{22}\, r_3. \tag{37}$$

Dies ist zugleich der Schnittpunkt y' von r' mit der Ebene $J_1 J_2 J_3$. Die Gerade r hat in der Ebene i_4 die Linienkoordinaten $\upsilon_1 = r_1$, $\upsilon_2 = r_2$, $\upsilon_3 = r_3$, und der Pol dieser Geraden in bezug auf den Kegelschnitt $g \times i_4$:

$$y_4 = 0,\ g_{11}\, y_1^2 + g_{22}\, y_2^2 + g_{33}\, y_3^2 \tag{38}$$

ist gerade der Punkt (37).

Die reziproke Polare r' der in der Ebene i_4 liegenden Hauptgeraden r ist die Verbindungslinie ihres Poles in bezug auf den Kegelschnitt $g \times i_4$ mit der Ecke J_4.

Daraus folgt, da $J_1\ J_2\ J_3$ ein Polardreieck ist, daß sich wieder je zwei gegenüberliegende Tetraederkanten als reziproke Hauptgerade entsprechen.

15. Zweite Form des Falles I, 4. Statt wie in 13 und 14 als Polardreieck können wir J_1, J_2, J_3 auch als Polarberührungsdreieck des Kegelschnittes $g \times i_4$ wählen. Dann wird das Tetraeder $J_1\, J_2\, J_3\, J_4$, da J_4 harmonischer Pol zu allen Punkten von i_4, also auch zu J_1, J_2, J_3, ferner J_2 harmonischer Pol zu J_1 und J_3, endlich J_1 und J_3 je zu sich selbst harmonische Pole sind, ein gemeinsames Polarberührungstetraeder der Flächen f und g. Wir erhalten dann wieder die kanonischen Gleichungen (16), nur mit $\lambda_2 = \lambda_1$. In der Tat folgen dann aus (19) wieder die Angaben (35).

16. Der Fall I, 5. Im Falle einer vierfachen Wurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ ($l_1 = 4,\ l_1' = 3,\ l_1'' = 2,\ l_1''' = 1$) fallen die beiden Flächen f und g zusammen. Alle Punkte des Raumes sind Hauptpunkte. Je nachdem wir als neues Tetraeder ein Polartetraeder oder Polarberührungstetraeder oder Schmiegungstetraeder wählen, erhalten wir die Gleichungsformen (3) oder (16) oder (27).

17. Übersicht der Fälle I. Die drei Gleichungsformen der Fälle I lauten:

$$(3) \quad \begin{cases} f = \lambda_1 g_{11} y_1^2 + \lambda_2 g_{22} y_2^2 + \lambda_3 g_{33} y_3^2 + \lambda_4 g_{44} y_4^2 = 0, \\ g = g_{11} y_1^2 + g_{22} y_2^2 + g_{33} y_3^2 + g_{44} y_4^2 = 0 \end{cases}$$

mit den Unterfällen:

1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ alle verschieden, 2. $\lambda_3 = \lambda_1$, 3. $\lambda_3 = \lambda_1,\ \lambda_4 = \lambda_2$, 4. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, 5. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$;

$$(16) \quad \begin{cases} f = \lambda_2 g_{22} y_2^2 + \lambda_4 g_{44} y_4^2 + 2 \lambda_1 g_{31} y_3 y_1 = 0, \\ g = g_{22} y_2^2 + g_{44} y_4^2 + 2 g_{31} y_3 y_1 = 0 \end{cases}$$

mit den Unterfällen:

2. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$ alle verschieden, 3. $\lambda_4 = \lambda_2$, 4. $\lambda_2 = \lambda_1$, 5. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4$;

$$(27) \quad \begin{cases} f = 2 \lambda_1 g_{31} y_3 y_1 + 2 \lambda_2 g_{24} y_2 y_4 = 0, \\ g = 2 g_{31} y_3 y_1 + 2 g_{24} y_2 y_4 = 0 \end{cases}$$

mit den Unterfällen:

3. $\lambda_2 \neq \lambda_1$, 4. $\lambda_2 = \lambda_1$.

Das gemeinsame Merkmal der drei Formen liegt darin, daß im Koordinatentetraeder jede Ecke zu drei Ecken in bezug auf beide Flächen f und g konjugiert und jede Kante zu einer Kante in bezug auf beide Flächen reziproke Polare ist:

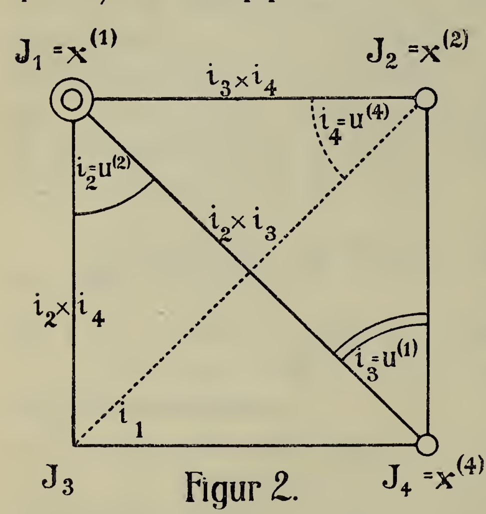
Die Zuordnung der Ecken geschieht dann aber für die drei Formen in der Weise, daß konjugiert ist:
bei (3): J_1 zu J_2, J_3, J_4; J_2 zu J_1, J_3, J_4; J_3 zu J_1, J_2, J_4; J_4 zu J_1, J_2, J_3;
bei (16): J_1 zu J_1, J_2, J_4; J_2 zu J_1, J_3, J_4; J_3 zu J_2, J_3, J_4; J_4, zu J_1, J_2, J_3;
bei (27): J_1 zu J_1, J_2, J_4; J_2 zu J_1, J_2, J_3; J_3 zu J_2, J_3, J_4; J_4 zu J_1, J_3, J_4.

Die Zuordnung der Kanten geschieht für die drei Formen in der Weise:
bei (3) : $J_2 J_3$ zu $J_1 J_4$, $J_3 J_1$ zu $J_2 J_4$, $J_1 J_2$ zu $J_3 J_4$;
bei (16): $J_3 J_1$ zu $J_2 J_4$, $J_2 J_3$ zu $J_3 J_4$, $J_1 J_2$ zu $J_1 J_4$;
bei (27): $J_3 J_1$ zu $J_2 J_4$; $J_2 J_3$, $J_1 J_2$, $J_1 J_4$, $J_3 J_4$ je zu sich selbst.

---

§ 4. Die Fälle II.

1. Hauptpunkte und Hauptebenen im Falle II, 2. Nach § 2, VIII gehört zur zweifachen Wurzel $\lambda_1 = \lambda_3$ ($l_1 = 2$, $l_1' = 0$) ein Hauptpunkt $x^{(1)} = x^{(3)}$ und eine Hauptebene $u^{(1)} = u^{(3)}$, und zu den einfachen Wurzeln λ_2 und λ_4 je ein Hauptpunkt $x^{(2)}$, $x^{(4)}$ und eine Hauptebene $u^{(2)}$, $u^{(4)}$. Die drei Hauptpunkte bilden nach § 2, Ia ein Dreieck. Der Hauptpunkt $x^{(1)}$ muß nach § 2, VIII mit $u^{(1)}$, nach § 1, IV mit $u^{(2)}$ und $u^{(4)}$ vereinigt liegen. Weiter liegt $x^{(2)}$ von $u^{(2)}$ getrennt, aber mit $u^{(1)}$ und $u^{(4)}$ vereinigt, und liegt $x^{(4)}$ von $u^{(4)}$ getrennt, aber mit $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$ vereinigt. Wir wählen für das neue Tetraeder (Fig. 2):



Figur 2.

$$(1) \qquad \begin{cases} J_1 = x^{(1)}, \; J_2 = x^{(2)}, \; J_4 = x^{(4)}; \\ i_3 = u^{(1)}, \; i_2 = u^{(2)}, \; i_4 = u^{(4)}, \end{cases}$$

womit auch die Kanten

$$(2) \qquad J_1 J_2 = i_3 \times i_4, \; J_1 J_4 = i_2 \times i_3, \; J_2 J_4 = i_2 \times i_4$$

bestimmt sind, J_3 aber auf $i_2 \times i_4$ verschiebbar bleibt.

2. Die kanonischen Gleichungen. Dann gelten nach § 2, (4) die Angaben der folgenden Uebersicht:

$$
(3)\left\{
\begin{array}{ll}
\left.\begin{array}{l} J_1 \text{ Hp. zu } \lambda_1 \\ i_3 \text{ He. zu } J_1 \end{array}\right\} &
\begin{array}{c}
J_1 \text{ in } i_3: \qquad J_2 \text{ in } i_3: \qquad J_3 \text{ nicht in } i_3: \\
f_{11} = \lambda_1 g_{11} = 0, \quad f_{12} = \lambda_1 g_{12} = 0, \quad f_{13} = \lambda_1 g_{13} \neq 0, \\
J_4 \text{ in } i_3: f_{14} = \lambda_1 g_{14} = 0;
\end{array} \\[2ex]
\left.\begin{array}{l} J_2 \text{ Hp. zu } \lambda_2 \\ i_2 \text{ He. zu } J_2 \end{array}\right\} &
\begin{array}{c}
J_1 \text{ in } i_2: \qquad J_2 \text{ nicht in } i_2: \qquad J_3 \text{ in } i_2; \\
f_{21} = \lambda_2 g_{21} = 0, \quad f_{22} = \lambda_2 g_{22} \neq 0, \quad f_{23} = \lambda_2 g_{23} = 0, \\
J_4 \text{ in } i_2: f_{24} = \lambda_2 g_{24} = 0;
\end{array} \\[2ex]
\left.\begin{array}{l} J_4 \text{ Hp. zu } \lambda_4 \\ i_4 \text{ He. zu } J_4 \end{array}\right\} &
\begin{array}{c}
J_1 \text{ in } i_4: \qquad J_2 \text{ in } i_4: \qquad J_3 \text{ in } i_4: \\
f_{41} = \lambda_4 g_{41} = 0, \quad f_{42} = \lambda_4 g_{42} = 0, \quad f_{43} = \lambda_4 g_{43} = 0, \\
J_4 \text{ nicht in } i_4: f_{44}\, \lambda_4 g_{44} \neq 0.
\end{array}
\end{array}\right.
$$

Danach werden die Gleichungen der Grundflächen:

$$
(4) \quad \left\{
\begin{array}{l}
f = \lambda_2 g_{22} y_2^2 + f_{33} y_3^2 + \lambda_4 g_{44} y_4^2 + 2 \lambda_1 g_{31} y_3 y_1 = 0 \\
g = g_{22} y_2^2 + g_{33} y_3^2 + g_{44} y_4^2 + g_{31} y_3 y_1 = 0
\end{array}\right.
$$

und des Büschels

$$
(5) \quad f - \lambda g = (\lambda_2 - \lambda) g_{22} y_2^2 + (f_{33} - \lambda g_{33}) y_3^2 + (\lambda_4 - \lambda) g_{44} y_4^2 + 2 (\lambda_1 - \lambda) g_{31} y_3 y_1 = 0.
$$

Die Kegel $\lambda = \lambda_1$ schneidet die Tangentialebene $y_3 = 0$ der Fläche g im Punkte J_1 in dem Linienpaar

$$
(6) \quad (\lambda_2 - \lambda_1) g_{22} y_2^2 + (\lambda_4 - \lambda_1) g_{44} y_4^2 = 0, \quad y_3 = 0,
$$

das das Tangentenpaar der Grundkurve $f - \lambda_1 g \times g$ im Berührungspunkte von f und g darstellt. D i e G r u n d k u r v e 4. O r d n u n g h a t i n J_1 e i n e n D o p p e l p u n k t.

3. Nachprüfung. Damit von der Determinante

$$
(7) \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix}
0 & 0 & (\lambda_1 - \lambda) g_{13} & 0 \\
0 & (\lambda_2 - \lambda) g_{22} & 0 & 0 \\
(\lambda_1 - \lambda) g_{31} & 0 & f_{33} - \lambda g_{33} & 0 \\
0 & 0 & 0 & (\lambda_4 - \lambda) g_{44}
\end{vmatrix} = - g_{22} g_{44} g_{31}^2 (\lambda_1 - \lambda)^2 (\lambda_2 - \lambda)(\lambda_4 - \lambda)
$$

für die Doppelwurzel $\lambda = \lambda_1$ nicht alle $\Delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden, muß sein:

$$
(8) \quad f_{33} - \lambda_1 g_{33} \neq 0.
$$

Die Gleichungen der Hauptpunkte

$$
(9) \quad (\lambda_1 - \lambda) g_{13} y_3 = 0, \quad (\lambda_2 - \lambda) g_{22} y_2 = 0, \quad (\lambda_1 - \lambda) g_{31} y_1 + (f_{33} - \lambda g_{33}) y_3 = 0, \quad (\lambda_4 - \lambda) g_{44} y_4 = 0
$$

geben mit Rücksicht auf die Polarbeziehung

$$
(10) \quad \upsilon_1 = \lambda_1 g_{13} y_3, \quad \upsilon_2 = \lambda_2 g_{22} y_2, \quad \upsilon_3 = \lambda_1 g_{31} y_1 + f_{33} y_3, \quad \upsilon_4 = \lambda_4 g_{44} y_4
$$

für:

$$
(11) \quad \lambda = \lambda_1: \ J_1, i_3; \qquad \lambda = \lambda_2: \ J_2, i_2; \qquad \lambda = \lambda_4: \ J_4, i_4.
$$

4. Hauptgerade. Die Beziehungen zwischen reziproken Polaren der beiden Flächen (4) lauten:

$$
(12)\quad \begin{cases}
r_1' = \lambda_1 \lambda_4 g_{31} g_{44} r_6 \\
r_2' = \lambda_2 \lambda_4 g_{22} g_{44} r_5 \\
r_3' = \lambda_1 \lambda_4 g_{31} g_{44} r_4 + \lambda_4 f_{33} g_{44} r_6 \\
r_4' = \lambda_2 f_{33} g_{22} r_1 - \lambda_1 \lambda_2 g_{22} g_{31} r_3 \\
r_5' = -\lambda_1^2 g_{31}^2 r^2 \\
r_6' = -\lambda_1 \lambda_2 g_{22} g_{31} r_1,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
r_1' = g_{31} g_{44} r_6 \\
r_2' = g_{22} g_{44} r_5 \\
r_3' = g_{31} g_{44} r_4 + g_{33} g_{44} r_6 \\
r_4' = g_{33} g_{22} r_1 - g_{22} g_{31} r_3 \\
r_5' = - g_{31}^2 r^2 \\
r_6' = - g_{22} g_{31} r_1
\end{cases}
$$

und daher die Bedingungen der Hauptgeraden:

$$
(13)\quad \begin{cases}
g_{31} g_{44} (\lambda_1 \lambda_4 - \rho) r_6 = 0,\; g_{22} g_{44} (\lambda_2 \lambda_4 - \rho) r_5 = 0,\; g_{31} g_{44} (\lambda_1 \lambda_4 - \rho) r_4 \\
\qquad + g_{44} (\lambda_4 f_{33} - \rho g_{33}) r_6 = 0, \\
g_{22} (\lambda_2 f_{33} - \rho g_{33}) r_1 - g_{22} g_{31} (\lambda_1 \lambda_2 - \rho) r_3 = 0,\; - g_{31}^2 (\lambda_1^2 - \rho) r_2 = 0, \\
\qquad - g_{22} g_{31} (\lambda_1 \lambda_2 - \rho) r_1 = 0.
\end{cases}
$$

Sie geben mit Rücksicht auf (8):

$$
(14)\quad \begin{cases}
\rho = \rho_1 = \rho_3 = \lambda_1 \lambda_2 : r_1 = 0,\; r_2 = 0,\; r_4 = 0,\; r_5 = 0,\; r_6 = 0 : \text{Kante } J_1 J_2; \\
\rho = \rho_4 = \rho_6 = \lambda_1 \lambda_4 : r_1 = 0,\; r_2 = 0,\; r_3 = 0,\; r_5 = 0,\; r_6 = 0 : \text{Kante } J_1 J_4; \\
\rho = \rho_2 = \lambda_1^2 : \quad r_1 = 0,\; r_3 = 0,\; r_4 = 0,\; r_5 = 0,\; r_6 = 0 : \text{Kante } J_3 J_1; \\
\rho = \rho_5 = \lambda_2 \lambda_4 : \quad r_1 = 0,\; r_2 = 0,\; r_3 = 0,\; r_4 = 0,\; r_6 = 0 : \text{Kante } J_2 J_4.
\end{cases}
$$

Hauptgerade sind die vier Kanten $J_1 J_2$, $J_1 J_4$, $J_3 J_1$, $J_2 J_4$. Die Kanten $J_1 J_2$ und $J_1 J_4$, die sich in J_1 schneiden, entsprechen sich gegenseitig als konjugierte Tangenten von f und g in J_1; die beiden Kanten $J_3 J_1$ und $J_2 J_4$ sind reziproke Polaren von f und g.

5. Hauptpunkte und Hauptebenen für II, 3. Zur zweifachen Wurzel $\lambda_1 = \lambda_3$ ($l_1 = 2$, $l_1' = 0$) gehört ein Hauptpunkt $x^{(1)}$ und eine Hauptebene $u^{(1)}$, die nach § 2, VIII vereinigt liegen. Zur Doppelwurzel $\lambda_2 = \lambda_4$ ($l_2 = 2$, $l_2' = 1$) gehört eine Hauptpunktreihe $x^{(2)} \ldots x^{(4)}$ und ein Hauptebenenbüschel $u^{(2)} \ldots u^{(4)}$, wobei Reihe und Büschelachse nach § 2, IX windschief liegen. Nach § 1, IV muß der Hauptpunkt $x^{(1)}$ auf der Büschelachse liegen und die Hauptebene $u^{(1)}$ mit der Reihe vereinigt liegen.

Wir wählen

$$J_1 = x^{(1)}, \quad i_3 = u^{(1)};$$

da die in i_3 liegende Hauptpunktreihe ihre reziproke Polare in bezug auf f und g, die Büschelachse, nicht schneidet, muß sie zwei getrennte Punkte J_2^0, J_4^0 mit f und dieselben mit g gemeinsam haben. Wir nehmen zwei zu J_2^0 und J_4^0 harmonische Punkte $x^{(2)}$, $x^{(4)}$ der Reihe als J_2 und J_4 und die diesen Punkten

entsprechenden Büschelebenen $u^{(2)}$ und $u^{(4)}$ als i_2 und i_4. Dann haben wir wieder die Angaben (3), doch mit $\lambda_2 = \lambda_4$, und damit auch die kanonischen Gleichungen (4) und (5) mit $\lambda_2 = \lambda_4$.

Das Büschel (5) enthält dann das Ebenenpaar:

(15) $$f - \lambda_2 g = (f_{33} - \lambda_2 g_{33}) y_3^2 + 2(\lambda_1 - \lambda_2) g_{31} y_3 y_1 = 0,$$

dessen eine Ebene i_3 Tangentialebene von f und g in J_1 ist und daher die Fläche g in einem Linienpaar mit dem Doppelpunkt J_1 schneidet. Die andre Ebene des Paares (15) schneidet g in einem Kegelschnitt, der zwei Punkte J_2^0, J_4^0 der Achse $J_2 J_4$ des Ebenenpaares mit dem Linienpaar gemein hat. Die Grundkurve besteht hier also aus diesem Kegelschnitt und dem Linienpaar.

Die Gleichungen (9) und (10) geben tatsächlich für:

(16) $$\lambda = \lambda_1 : \quad J_1, i_3; \qquad \lambda = \lambda_2 = \lambda_4 : \quad J_2 \ldots . J_4, i_2 \ldots . i_4.$$

6. Hauptgerade. Als Hauptgerade ergeben sich aus (13) mit Hinblick auf (8) für:

(17) $$\begin{cases} \rho = \rho_1 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_6 = \lambda_1 \lambda_2 : \; r_1 = 0, \; r_2 = 0, \; r_5 = 0, \; r_6 = 0; \\ \qquad y_3 = 0, \; - r_4 y_2 + r_3 y_4 = 0: \end{cases}$$

alle Geraden in i_3 durch J_1, paarweise als konjugierte Tangenten einander entsprechend, nach (12) in der Weise, daß der Hauptgeraden (17) die Hauptgerade:

(18) $$y_3 = 0, \; g_{22} r_3 y_2 + g_{44} r_4 y_4 = 0$$

entspricht. Die beiden Hauptgeraden (17) und (18) fallen in eine gemeinsame Erzeugende von f und g zusammen für:

(19) $$g_{22} r_3^2 + g_{44} r_4^2 = 0, \; r_1 = 0, \; r_2 = 0, \; r_5 = 0, \; r_6 = 0;$$

das ist aber das als Bestandteil der Grundkurve erwähnte Linienpaar $g \times i_3$. Unter den Hauptgeraden (17) und (18) befinden sich auch, einander entsprechend, die beiden Kanten $J_1 J_2$ und $J_1 J_4$. Weiter ergibt sich aus (13) für:

(20) $$\begin{cases} \rho = \rho_2 = \lambda_1^2 : r_1 = 0, \; r_3 = 0, \; r_4 = 0, \; r_5 = 0, \; r_6 = 0 : \text{Kante } J_1 J_3; \\ \rho = \rho_5 = \lambda_2^2 : r_1 = 0, \; r_2 = 0, \; r_3 = 0, \; r_4 = 0, \; r_6 = 0 : \text{Kante } J_2 J_4, \end{cases}$$

beiden Kanten nach (12) als reziproke Polaren sich gegenseitig entsprechend.

7. Andere Wahl von J_2, J_4 bei II, 3. Anders als unter 5 wählen wir jetzt die Schnittpunkte J_2^0 und J_4^0 der Hauptpunktreihe $x^{(2)} \ldots . x^{(4)}$ als Ecken J_2 und J_4 und die ent-

sprechenden, mit ihnen vereinigt liegenden Ebenen des Büschels $u^{(2)} \dots u^{(4)}$ als i_4 und i_2. Dann haben wir an Stelle der beiden letzten Angaben (3):

$$(21)\begin{cases} \left.\begin{matrix} J_2 \text{ Hp. zu } \lambda_2 \\ i_4 \text{ He. zu } J_2 \end{matrix}\right\} : \begin{matrix} J_1 \text{ in } i_4: & J_2 \text{ in } i_4: & J_3 \text{ in } i_4: \\ f_{21}=\lambda_2 g_{21}=0, & f_{22}=\lambda_2 g_{22}=0, & f_{23}=\lambda_2 g_{23}=0, \\ & J_4 \text{ nicht in } i_4: f_{24}=\lambda_2 g_{24} \neq 0; & \end{matrix} \\ \left.\begin{matrix} J_4 \text{ Hp. zu } \lambda_2 \\ i_2 \text{ He. zu } J_4 \end{matrix}\right\} : \begin{matrix} J_1 \text{ in } i_2: & J_2 \text{ nicht in } i_2: & J_3 \text{ in } i_2: \\ f_{41}=\lambda_2 g_{41}=0, & f_{42}=\lambda_2 g_{42} \neq 0, & f_{43}=\lambda_2 g_{43}=0, \\ & J_4 \text{ in } i_2: f_{44}=\lambda_2 g_{44}=0. & \end{matrix} \end{cases}$$

Damit werden die Gleichungen der Grundflächen:

$$(22)\quad \begin{cases} f = f_{33} y_3^2 + 2\lambda_1 g_{31} y_3 y_1 + 2\lambda_2 g_{24} y_2 y_4 = 0, \\ g = g_{33} y_3^2 + 2 g_{31} y_3 y_1 + 2 g_{24} y_2 y_4 = 0 \end{cases}$$

und des Büschels:

$$(23)\quad f-\lambda g=(f_{33}-\lambda g_{33})y_3^2+2(\lambda_1-\lambda)g_{31}y_3y_1+2(\lambda_2-\lambda)g_{24}y_2y_4=0.$$

Das Büschel enthält wiederum das Ebenenpaar (15), dessen eine Ebene i_3 die Fläche g in den beiden Kanten $J_1 J_2$ und $J_1 J_4$ schneidet. Die Achse $J_2 J_4$ des Ebenenpaares schneidet auch die Fläche g nach (22) in J_2 und J_4, so daß auch der der Grundkurve angehörige Kegelschnitt durch J_2 und J_4 geht.

8. Nachprüfung. Die Determinante wird:

$$(24)\quad \Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda)g_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_2-\lambda)g_{24} \\ (\lambda_1-\lambda)g_{31} & 0 & f_{33}-\lambda g_{33} & 0 \\ 0 & (\lambda_2-\lambda)g_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix} = g_{31}^2 g_{24}(\lambda_1-\lambda)^2(\lambda_2-\lambda),$$

wo wie bei (7) die Bedingung (8) erfüllt sein muß, damit $l_1'=0$ gilt neben $l_2'=1$, $l_2''=0$.

Die Polarbeziehungen werden:

$$(25)\begin{cases} v_1=\lambda_1 g_{13} y_3, \quad v_2=\lambda_2 g_{24} y_4, \quad v_3=\lambda_1 g_{31} y_1+f_{33} y_3, \quad v_4=\lambda_2 g_{42} y_2; \\ v_1=g_{13} y_3, \quad v_2=g_{24} y_4, \quad v_3=g_{31} y_1+g_{33} y_3, \quad v_4=g_{42} y_2, \end{cases}$$

und die Gleichungen für die Hauptpunkte:

$$(26)\begin{cases} (\lambda_1-\lambda) g_{13} y_3=0, \quad (\lambda_2-\lambda) g_{24} y_4=0, \quad (\lambda_1-\lambda) g_{31} y_1 + \\ \qquad (f_{33}-\lambda g_{33}) y_3=0, \quad (\lambda_2-\lambda) g_{42} y_2=0 \end{cases}$$

geben für:

$$(27)\quad \lambda=\lambda_1: \quad J_1, i_3; \quad \lambda=\lambda_2: \quad J_2 \dots J_4, \quad i_2 \dots i_4.$$

9. Die Hauptgeraden. Die Beziehungen zwischen reziproken Polaren der beiden Flächen (22) werden:

$$(28)\quad \begin{cases} r_1' = \lambda_1 \lambda_2 g_{42} g_{13} r_1 \\ r_2' = \lambda_2^2 g_{42} g_{24} r_5 \\ r_3' = \lambda_2 g_{42} f_{33} r_1 - \lambda_1 \lambda_2 g_{31} g_{42} r_3 \\ r_4' = \lambda_1 \lambda_2 g_{31} g_{24} r_4 + \lambda_2 g_{24} f_{33} r_6 \\ r_5' = \lambda_1^2 g_{13} g_{31} r_2 \\ r_6' = \lambda_1 \lambda_2 g_{13} g_{24} r_6, \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1' = g_{42} g_{13} r_1 \\ r_2' = g_{42} g_{24} r_5 \\ r_3' = g_{42} g_{33} r_1 - g_{31} g_{42} r_3 \\ r_4' = g_{31} g_{24} r_4 + g_{24} g_{33} r_6 \\ r_5' = g_{13} g_{31} r_2 \\ r_6' = - g_{13} g_{24} r_6 \end{cases}$$

und die Gleichungen für die Hauptgeraden:

$$(29)\quad \begin{cases} g_{42}\, g_{13}\, (\lambda_1 \lambda_2 - \rho)\, r_1 = 0, \quad g_{42}\, g_{24}\, (\lambda_2^2 - \rho)\, r_5 = 0, \\ g_{42}\, (\lambda_2 f_{33} - \rho g_{33})\, r_1 - g_{31}\, g_{42}\, (\lambda_1 \lambda_2 - \rho)\, r_3 = 0, \\ g_{31}\, g_{42}\, (\lambda_1 \lambda_2 - \rho)\, r_4 + g_{24}\, (\lambda_2 f_{33} - \rho g_{33})\, r_6 = 0, \\ g_{13}\, g_{31}\, (\lambda_1^2 - \rho)\, r_2 = 0, \quad - g_{13}\, g_{24}\, (\lambda_1 \lambda_2 - \rho)\, r_6 = 0. \end{cases}$$

Sie geben für:

$$\rho = \rho_1 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_6 = \lambda_1 \lambda_2 : \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_5 = 0, \quad r_6 = 0;$$
$$y_3 = 0, \; - r_4\, y_2 + r_3\, y_4 = 0 :$$

alle Geraden in i_3 durch J_1, wobei sich nach (28) die Geraden:

$$(30)\qquad y_3 = 0, \; - r_4\, y_2 + r_3\, y_4 = 0 \text{ und } y_3 = 0, \; r_4\, y_2 + r_3\, y_4 = 0$$

entsprechen, darunter je sich selbst entsprechend die Kanten $J_1 J_2$ und $J_1 J_4$; für $\rho = \rho_2 = \lambda_1^2$ und $\rho = \rho_5 = \lambda_2^2$, wie in (20), die Kanten $J_1 J_3$ und $J_2 J_4$ sich gegenseitig entsprechend.

10. Die Grundkurve. Die Fläche g und das Ebenenpaar λ_2 (15), das dem Büschel (23) angehört, haben als Durchschnitt einmal das Kantenpaar $J_1 J_2$ und $J_1 J_4$; außerdem den Kegelschnitt, in dem die Ebene

$$(31)\qquad (f_{33} - \lambda_2\, g_{33})\, y_3 + 2\, (\lambda_1 - \lambda_2)\, y_1 = 0$$

die Fläche g schneidet, und der durch J_2 und J_4 geht. Die beiden Flächen (22) berühren sich in den Ecken J_1, J_2, J_3 und haben hier die Tangentialebenen i_3, i_4, i_2.

11. Der Fall II, 4. Hauptpunkte und Hauptebenen. Zur dreifachen Wurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ($l_1 = 3$, $l_1' = 1$, $l_1'' = 0$) gehört nach § 2, VI eine Hauptpunktreihe $x^{(1)} \ldots x^{(2)} \ldots x^{(3)}$ und ein Hauptebenenbüschel $u^{(1)} \ldots u^{(2)} \ldots u^{(3)}$. Reihe und Büschelachse liegen nach § 2, IX vereinigt, und zwar haben sie nach § 2, XII nur einen Punkt gemein, sind in diesem Punkte $x^{(1)}$ also konjugierte Tangenten an f und g. Die Verbindungsebene beider ist als Tangentialebene der Flächen f und g in $x^{(1)}$ die dem Punkte $x^{(1)}$ entsprechende Hauptebene $u^{(1)}$. Zur einfachen Wurzel λ_4 gehört ein Hauptpunkt

$x^{(4)}$, der wegen § 1, IV auf der Büschelachse liegt, und eine Hauptebene $u^{(4)}$, die nach § 1, IV durch die Punktreihe gehen muß.

Für das neue Tetraeder wählen wir $x^{(1)}$ als J_1 und einen beliebigen weiteren Punkt $x^{(2)}$ der Reihe als J_2. Der Punkt $x^{(4)}$ möge die Ecke J_4 bilden. Dann ist die Ebene $i_3 = J_1 J_2 J_4$ die Polarebene $u^{(1)}$ von $x^{(1)}$. Wir nehmen $u^{(4)} = i_4$ und endlich die Polarebene $u^{(2)}$ von $x^{(2)}$, die als Büschelebene durch J_1 und J_4 geht, als i_2. Die Ecke J_3 bleibt dann auf $i_2 \times i_4$ verschiebbar, so daß wieder die Bedingungen (1), (2), (3) vorliegen, also die kanonischen Gleichungen (4) und (5) gelten müssen, doch mit $\lambda_2 = \lambda_1$.

Das Büschel (5) enthält dann das Ebenenpaar:

$$(32) \qquad f - \lambda_1 g = (f_{33} - \lambda_1 g_{33}) y_3^2 + (\lambda_4 - \lambda_1) g_{44} y_4^2 = 0,$$

dessen Achse die Tangente $J_1 J_2$ der beiden Flächen f und g in J_1 ist, so daß die Ebenen des Paares, von denen keine die Tangentialebene i_3 von g in J_1 ist, die Fläche g *in zwei sich in J_1 berührenden eigentlichen Kegelschnitten* schneidet. Diese bilden die Grundkurve.

Aus (9) und (10) folgt in der Tat für:

$$(33) \qquad \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 : \quad J_1 \dots J_2,\ i_2 \dots i_3; \quad \lambda = \lambda_4 : \quad J_4,\ i_4.$$

12. Hauptgerade. Die Bedingungen (13) für die Hauptgeraden geben hier, bei $\lambda_1 = \lambda_2$, für:

$$(34) \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \lambda_1^2 : r_1 = 0,\ r_4 = 0,\ r_5 = 0,\ r_6 = 0; \\ \quad y_4 = 0,\ r_2 y_2 + r_3 y_3 = 0 : \text{alle Geraden in } i_4 \text{ durch } J_1; \\ \rho = \rho_4 = \rho_5 = \rho_6 = \lambda_1 \lambda_4 : r_1 = 0,\ r_2 = 0,\ r_3 = 0,\ r_6 = 0; \\ \quad y_3 = 0,\ r_5 y_1 - r_4 y_2 = 0 : \text{alle Geraden in } i_3 \text{ durch } J_4. \end{array} \right.$$

Es sind die Schnittlinien der Büschelebenen mit der Hauptebene i_4 und die Verbindungslinien der Punkte der Reihe mit dem Hauptpunkte J_4. Dabei entsprechen sich nach (12) die Hauptgeraden:

$$(35) \quad y_4 = 0,\ r_2 y_2 + r_3 y_3 = 0 \text{ und } y_3 = 0,\ g_{31} r_2 y_1 - g_{22} r_3 y_2 = 0,$$

darunter die Kanten $J_1 J_2$ und $J_1 J_4$, sowie $J_3 J_1$ und $J_2 J_4$ sich gegenseitig entsprechend.

13. Der Fall II, 5. Zur vierfachen Wurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ $(l_1' = 2,\ l_1'' = 1,\ l_1''' = 0)$ gehört ein Feld von Hauptpunkten $x^{(1)} \dots x^{(2)} \dots x^{(3)} \dots x^{(4)}$ und ein Bündel von Hauptebenen $u^{(1)} \dots u^{(2)} \dots u^{(3)} \dots u^{(4)}$, wobei nach § 2, X das Feld mit dem

Bündelzentrum vereinigt liegt, als dessen Tangentialebene in bezug auf f und g. Daher muß die Feldebene die Fläche f in einem Paar von Erzeugenden $p^{(3)0}$, $p^{(4)0}$ schneiden, das zugleich der Fläche g angehört, da es aus Hauptpunkten besteht.

Im neuen Tetraeder möge das Bündelzentrum $x^{(1)}$ die Ecke J_1, seine Polarebene $u^{(1)}$, die Feldebene, die Seite i_3 darstellen. Dann wählen wir beliebig in i_3 den Eckpunkt $x^{(2)} = J_2$ und auf dem zu $p^{(3)0}$, $p^{(4)0}$ und $J_1 J_2$ vierten harmonischen Strahl den Eckpunkt $x^{(4)} = J_4$. Nun gehen $u^{(2)}$ und $u^{(4)}$, die Polarebenen von $x^{(2)}$ und $x^{(4)}$, bezüglich durch $J_1 J_4$ und durch $J_1 J_2$ und werden als i_2 und i_4 gewählt. Endlich nehmen wir die Tetraederecke J_3 auf $i_2 \times i_4$ beliebig an. So gelten auch hier die Angaben (1), (2), (3) und damit die kanonischen Gleichungen (4) und (5), doch hier mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4$.

Das Büschel enthält für $\lambda = \lambda_1$ die Doppelebene i_3:

(36) $$(f_{33} - \lambda_1 g_{33}) y_3^2 = 0,$$

und die Grundkurve besteht aus dem doppelt zählenden Linienpaar der gemeinsamen Erzeugenden $p^{(3)0}$, $p^{(4)0}$ der Flächen (4):

(37) $$y_3^2 = 0, \quad g_{22} y_2^2 + g_{44} y_4^2 = 0.$$

In der Tat folgen aus (9), (10) für

(38) $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4$: alle Punkte in i_3, alle Ebenen durch J_1;

und aus (13) für $\rho = \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = \rho_5 = \rho_6 = \lambda_1^2 : r_1 = 0$, $r_6 = 0$, und da von der stets gültigen Identität $r_1 r_4 + r_2 r_5 + r_3 r_6 = 0$ nur $r_2 r_5 = 0$ übrig bleibt:

(39) $$\begin{cases} r_1 = 0, \quad r_6 = 0, \quad r_2 = 0; \quad y_3 = 0, \quad r_5 y_1 - r_4 y_2 + r_3 y_4 = 0: \\ \qquad \text{alle } \infty^2 \text{ Geraden in } i_3, \\ r_1 = 0, \quad r_6 = 0, \quad r_5 = 0; \quad y_2 : y_6 : y_4 = r_3 : -r_2 : r_4 : \text{alle } \infty^2 \\ \qquad \text{Geraden durch } J_1 \text{ als Hauptgerade.} \end{cases}$$

14. Andere Form des Falles II, 5. Wir können aber die Punkte J_2 und J_4 auch beliebig auf den beiden gemeinsamen Erzeugenden $p^{(3)0}$ und $p^{(4)0}$ selbst annehmen und dann die den Hauptpunkten J_2 und J_4 entsprechenden Hauptebenen des Bündels, die beide durch J_1 und bezüglich durch J_2 und J_4 gehen, als i_2 und i_4. Dann gelten wieder die Angaben (21) und die kanonischen Gleichungen (22), (23) mit $\lambda_2 = \lambda_1$. Das Büschel (23) enthält dann für

$\lambda = \lambda_1$ wieder die Doppelebene (36). Sie schneidet die Flächen (22) in dem Linienpaar:

(40) $\quad y_3^2 = 0, \quad y_2 y_4 = 0,$

also wie bei (37) in den beiden Erzeugenden $p^{(3)0}$ und $p^{(4)0}$ der Flächen (22) im Punkte J_1. In der Tat folgen aus (26), (25) für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ wieder die Hauptelemente (38).

Die Kanten $J_1 J_2$ und $J_1 J_4$ entsprechen als Hauptgerade je sich selbst, die Kanten $J_3 J_1$ und $J_2 J_4$ sich gegenseitig.

15. Übersicht der Fälle II. Die beiden Gleichungsformen der Fälle II lauten:

$$(4) \quad \begin{cases} f = \lambda_2 g_{22} y_2^2 + f_{33} y_3^2 + \lambda_4 g_{44} y_4^2 + 2 \lambda_1 g_{31} y_3 y_1 = 0, \\ g = g_{22} y_2^2 + g_{33} y_3^2 + g_{44} y_4^2 + 2 g_{31} y_3 y_1 = 0, \end{cases}$$

$$(8) \quad f_{33} - \lambda_1 g_{33} \neq 0,$$

mit den Unterfällen:

2. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4$ alle verschieden, 3. $\lambda_4 = \lambda_2$, 4. $\lambda_2 = \lambda_1$, 5. $\lambda_4 = \lambda_2 = \lambda_1$, und:

$$(22) \quad \begin{cases} f = f_{33} y_3^2 + 2 \lambda_1 g_{31} y_3 y_1 + 2 \lambda_2 g_{24} y_2 y_4 = 0, \\ g = g_{33} y_3^2 + 2 g_{31} y_3 y_1 + 2 g_{24} y_2 y_4 = 0, \end{cases}$$

$$(8) \quad f_{33} - \lambda_1 g_{33} \neq 0,$$

mit den Unterfällen:

3. $\lambda_2 \neq \lambda_1$, 5. $\lambda_2 = 1$.

Bei der Form (4) sind die Ecken:

J_1 zu J_1, J_2, J_4; $\quad J_2$ zu J_1, J_3, J_4; $\quad J_3$ zu J_2, J_4; $\quad J_4$ zu J_1, J_2, J_3

in bezug auf beide Flächen *harmonische Pole*, bei der Form (22) die Ecken:

J_1 zu J_1, J_2, J_4; $\quad J_2$ zu J_1, J_2, J_3; $\quad J_3$ zu $J_2 J_4$; $\quad J_4$ zu J_1, J_3, J_4.

Bei der Form (4) sind die Kanten:

$J_3 J_1$ zu $J_2 J_4$, $\quad J_1 J_2$ zu $J_1 J_4$

in bezug auf beide Flächen *reziproke Polaren*, bei der Form (22) die Kanten,

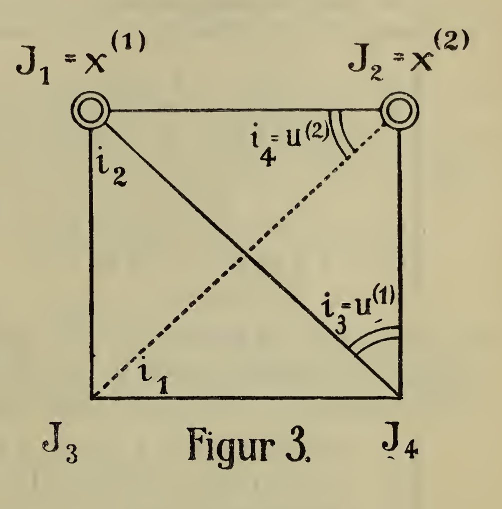
$J_3 J_1$ zu $J_2 J_4$, $\quad J_1 J_2$ zu $J_1 J_2$, $\quad J_1 J_4$ zu $J_1 J_4$.

§ 5. Die Fälle III.

1. Hauptpunkte und Hauptebenen. Zu den beiden Doppelwurzeln $\lambda_1 = \lambda_4$ und $\lambda_2 = \lambda_3$ gehört je ein Hauptpunkt $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$, sowie eine Hauptebene $u^{(1)}$ und $u^{(2)}$.

Nach § 1, IV liegt $u^{(1)}$ mit $x^{(2)}$ und $u^{(2)}$ mit $x^{(1)}$ vereinigt, nach § 2, VIII auch $u^{(1)}$ mit $x^{(1)}$ und $u^{(2)}$ mit $x^{(2)}$. Wegen des letzteren Umstandes ist $u^{(1)}$ gemeinsame Tangentialebene der beiden Flächen f und g in $x^{(1)}$, ebenso $u^{(2)}$ in $x^{(2)}$. Wir nehmen für das neue Tetraeder (Fig. 3):

$$(1) \quad J_1 = x^{(1)}\ (\lambda_1 = \lambda_4),\quad J_2 = x^{(2)}\ (\lambda_2 = \lambda_3),\quad i_4 = u^{(1)},\ i_3 = u^{(2)}.$$



Figur 3.

Dann gelten nach § 2, 4 die Angaben der folgenden Übersicht:

$$(2) \begin{cases} \left.\begin{matrix} J_1 \text{ Hp. zu } \lambda_1 \\ i_4 \text{ He. zu } J_1 \end{matrix}\right\}: \begin{matrix} J_1 \text{ in } i_4: & J_2 \text{ in } i_4: & J_3 \text{ in } i_4: \\ f_{11} = \lambda_1 g_{11} = 0, & f_{12} = \lambda_1 g_{12} = 0, & f_{13} = \lambda_1 g_{13} = 0, \end{matrix} \\ \qquad J_4 \text{ nicht in } i_4: f_{14} = \lambda_1 g_{14} \neq 0; \\ \left.\begin{matrix} J_2 \text{ Hp. zu } \lambda_2 \\ i_3 \text{ He. zu } J_2 \end{matrix}\right\}: \begin{matrix} J_1 \text{ in } i_3: & J_2 \text{ in } i_3: & J_3 \text{ nicht in } i_3: \\ f_{21} = \lambda_2 g_{21} = 0, & f_{22} = \lambda_2 g_{22} = 0, & f_{23} = \lambda_2 g_{23} \neq 0, \end{matrix} \\ \qquad J_4 \text{ in } i_3: f_{24} = \lambda_2 g_{24} = 0. \end{cases}$$

2. Vorläufige Gleichungen. Danach werden die Gleichungen der beiden Flächen:

$$(3) \begin{cases} f = f_{33} y_3^2 + f_{44} y_4^2 + 2\lambda_2 g_{23} y_2 y_3 + 2\lambda_1 g_{14} y_1 y_4 + 2 f_{34} y_3 y_4 = 0 \\ g = g_{33} y_3^2 + g_{44} y_4^2 + 2 g_{23} y_2 y_3 + 2 g_{14} y_1 y_4 + 2 g_{34} y_3 y_4 = 0 \end{cases}$$

und die Büscheldeterminante:

$$(4) \quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (\lambda_1 - \lambda) g_{41} \\ 0 & 0 & (\lambda_2 - \lambda) g_{23} & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda) g_{32} & f_{33} - \lambda g_{33} & f_{34} - \lambda g_{34} \\ (\lambda_1 - \lambda) g_{41} & 0 & f_{43} - \lambda g_{43} & f_{44} - \lambda g_{44} \end{vmatrix} = g_{23}^2 g_{14}^2 (\lambda_1 - \lambda) \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)^2.$$

Damit $l_1' = 0$, $l_2' = 0$, darf

$$\Delta_{11}(\lambda_1) = - g_{23}^2 (\lambda_2 - \lambda_1)^2 (f_{44} - \lambda_1 g_{44}),$$

$$\Delta_{22}(\lambda_2) = - g_{14}^2 (\lambda_1 - \lambda) (f_{33} - \lambda_2 g_{33})$$

nicht verschwinden, also muß sein:

$$(5) \qquad f_{44} - \lambda_1 g_{44} \neq 0, \qquad f_{33} - \lambda_2 g_{33} \neq 0.$$

3. Die Hauptgeraden. Zwischen reziproken Polaren in bezug auf die Fläche f in (3) bestehen die Gleichungen

$$(6) \quad \begin{cases} r_1' = - \lambda_1^2 g_{14}^2 r_4 - \lambda_1 g_{14} f_{34} r_6 \\ r_2' = \lambda_1 \lambda_2 g_{23} g_{14} r_2 + \lambda_2 g_{23} f_{44} r_6 \\ r_3' = \lambda_2 g_{23} f_{34} r_1 + \lambda_1 g_{14} f_{33} r_2 - \lambda_1 \lambda_2 g_{23} g_{14} r_3 - \lambda_1 g_{14} f_{34} r_4 + \\ \qquad\qquad \lambda_2 g_{23} f_{44} r_5 + (f_{33} f_{44} - f_{34}^2) r_6 \\ r_4' = - \lambda_2^2 g_{23}^2 r_1 + \lambda_2 g_{23} f_{34} r_6 \\ r_5' = \lambda_1 \lambda_2 g_{23} g_{14} r_5 + \lambda_1 g_{14} f_{33} r_6 \\ r_6' = - \lambda_1 \lambda_2 g_{23} g_{14} r_6, \end{cases}$$

in bezug auf die Fläche g in (3) dieselben, nur mit g für ı und mit Weglassung von λ_1, λ_2. In Folge dessen werden die Gleichungen für die Hauptgeraden bei der Gleichungsform (3):

$$(7) \quad \begin{cases} 1. \; - g_{23}^2 (\lambda_2^2 - \rho) r_1 + g_{23} (\lambda_2 f_{34} - \rho g_{34}) r_6 = 0 \\ 2. \quad g_{23} g_{14} (\lambda_1 \lambda_2 - \rho) r_5 + g_{14} (\lambda_1 f_{33} - \rho g_{33}) r_6 = 0 \\ 3. \; - g_{23} g_{14} (\lambda_1 \lambda_2 - \rho) r_6 = 0 \\ 4. \; - g_{14}^2 (\lambda_1^2 - \rho) r_4 - g_{14} (\lambda_1 f_{34} - \rho g_{34}) r_6 = 0 \\ 5. \quad g_{23} g_{14} (\lambda_1 \lambda_2 - \rho) r_2 + g_{23} (\lambda_2 f_{44} - \rho g_{44}) r_6 = 0 \\ 6. \quad g_{23} (\lambda_2 f_{34} - \rho g_{34}) r_1 + g_{14} (\lambda_1 f_{33} - \rho g_{33}) r_2 - g_{23} g_{14} (\lambda_1 \lambda_2 - \rho) r_3 \\ \qquad - g_{14} (\lambda_1 f_{34} - \rho g_{34}) r_4 + g_{23} (\lambda_2 f_{44} - \rho g_{44}) r_5 + [f_{33} f_{44} - f_{34}^2 \\ \qquad\qquad - \rho (g_{33} g_{44} - g_{34}^2)] r_6 = 0. \end{cases}$$

Für die singuläre Wurzel $\rho = \lambda_1 \lambda_2$ wird hiernach mit Rücksicht auf (5):

$r_6 = 0$ (aus 2, 5), $r_1 = 0$ (aus 1), $r_4 = 0$ (aus 4); nimmt man nun noch $R = r_2 r_5 = 0$ hinzu, so folgt (aus 6) wegen (5), daß mit $r_2 = 0$ auch $r_5 = 0$ wird und umgekehrt.

Zur singulären Wurzel $\rho = \lambda_1 \lambda_2$ gehört also die Kante $J_1 J_2$. Weiter erhalten wir

$$(8)\begin{cases} \text{zu } \rho=\lambda_1^2: r_6=0 \text{ (aus 3)}, r_1=0 \text{ (aus 1)}, r_5=0 \text{ (aus 2)}, r_2=0 \text{ (aus 5)}, \\ \qquad g_{23}(\lambda_2-\lambda_1)\, r_3+(f_{34}-\lambda_1 g_{34})\, r_4=0 \text{ (aus 6)}: \\ \qquad\qquad \mathbf{y_3=0,\ r_4 y_2-r_3 y_4=0.} \\ \text{zu } \rho'=\lambda_2^2: r_6=0 \text{ (aus 3)}, r_4=0 \text{ (aus 4)}, r_5=0 \text{ (aus 2)}, r_2=0 \text{ (aus 5)}, \\ \qquad (f_{34}-\lambda_2 g_{34})\, r_1-g_{14}(\lambda_1-\lambda_2)\, r_3=0 \text{ (aus 6)}: \\ \qquad\qquad \mathbf{y_4=0,\ r_1 y_1+r_3 y_3=0.} \end{cases}$$

Zu den beiden reziproken Wurzeln $\rho=\lambda_1^2$, $\rho'=\lambda_2^2$ gehören als reziproke Polaren, die sich nach (6) tatsächlich entsprechen, die Geraden:

(9) $y_3=0,\ g_{23}(\lambda_2-\lambda_1)\, y_2+(f_{34}-\lambda_1 g_{34})\, y_4=0$ in i_3 durch J_1, nicht durch J_2;

(10) $y_4=0,\ g_{14}(\lambda_1-\lambda_2)\, y_1+(f_{34}-\lambda_2 g_{34})\, y_3=0$ in i_4 durch J_2, nicht durch J_1.

4. Endgültige Gleichungsform. Legt man nun die in i_3 durch J_1 willkürliche Kante $J_1 J_4$ in die Gerade (9), also J_4 auf (9), und die in i_4 durch J_2 willkürliche Kante $J_2 J_3$ in die Gerade (10), also J_3 auf (10), so wird:

$$f_{34}-\lambda_1 g_{34}=0, \qquad f_{34}-\lambda_2 g_{34}=0, \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2,$$

also

$$(11) \qquad f_{34}=0, \qquad g_{34}=0.$$

In der Tat sind J_3 und J_4 als Punkte zweier in bezug auf beide Flächen f und g reziproker Polaren auch harmonische Pole in bezug auf beide. Nun werden die Gleichungen (3):

$$(12)\begin{cases} f=f_{33} y_3^2+f_{44} y_4^2+2\lambda_2 g_{23} y_2 y_3+2\lambda_1 g_{14} y_1 y_4=0 \\ g=g_{33} y_3^2+g_{44} y_4^2+2 g_{23} y_2 y_3+2 g_{14} y_1 y_4=0 \end{cases} \text{*)}$$

und die Büschelgleichung:

$$(13)\quad f-\lambda g=(f_{33}-\lambda g_{33})\, y_3^2+(f_{44}-\lambda g_{44})\, y_4^2+2(\lambda_2-\lambda)\, g_{23} y_2 y_3+ 2(\lambda_1-\lambda)\, g_{14} y_1 y_4=0$$

mit (5) $\qquad f_{44}-\lambda_1 g_{44} \neq 0, \qquad f_{33}-\lambda_2 g_{33} \neq 0.$

Die Gleichungen für die Hauptpunkte werden:

$$(14)\begin{cases} (\lambda_1-\lambda)\, g_{14} y_4=0 \\ (\lambda_2-\lambda)\, g_{23} y_3=0 \\ (\lambda_2-\lambda)\, g_{32} y_2+(f_{33}-\lambda g_{33})\, y_3=0 \\ (\lambda_1-\lambda)\, g_{41} y_1+(f_{44}-\lambda g_{44})\, y_4=0, \end{cases}$$

und die Koordinaten ihrer Polarebenen, der Hauptebenen, sind dann:

---

*) Vgl. Heffter, Lehrb. d. analyt. Geometrie, Bd. II, S. 383, (68); statt $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ steht dort $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3\ \xi_4$.

$$(15) \qquad v_1 = \lambda_1\, g_{14}\, y_4, \qquad v_2 = \lambda_2\, g_{23}\, y_3, \qquad v_3 = \lambda_2\, g_{32}\, y_2 + f_{33}\, y_3,$$
$$v_4 = \lambda_1\, g_{41}\, y_1 + f_{44}\, y_4,$$

woraus wir in der Tat

$$(16) \qquad \text{für } \lambda = \lambda_1: \quad J_1,\ i_4; \qquad\qquad \text{für } \lambda = \lambda_2: \quad J_2,\ i_3$$

als Hauptelemente erhalten.

5. Hauptgerade. Die Beziehungen zwischen reziproken Polaren werden bei der Gleichungsform (12):

$$(17) \quad \begin{cases} r_1' = -\lambda_1^2\, g_{14}^2\, r_4 \\ r_2' = \lambda_1\, \lambda_2\, g_{23}\, g_{14}\, r_2 + \lambda_2\, g_{23}\, f_{44}\, r_6 \\ r_3' = \lambda_1\, g_{14}\, f_{33}\, r_2 - \lambda_1\, \lambda_2\, g_{23}\, g_{14}\, r_3 + \lambda_2\, g_{23}\, f_{44}\, r_5 + f_{33}\, f_{44}\, r_6 \\ r_4' = -\lambda_2^2\, g_{23}^2\, r_1 \\ r_5' = \lambda_1\, \lambda_2\, g_{23}\, g_{14}\, r_5 + \lambda_1\, g_{14}\, f_{33}\, r_6 \\ r_6' = -\lambda_1\, \lambda_2\, g_{23}\, g_{14}\, r_6, \end{cases}$$

$$(17a) \quad \begin{cases} r_1' = -g_{14}^2\, r_4 \\ r_2' = g_{23}\, g_{14}\, r_2 + g_{23}\, g_{44}\, r_6 \\ r_3' = g_{14}\, g_{33}\, r_2 - g_{23}\, g_{14}\, r_3 + g_{23}\, g_{44}\, r_5 + g_{23}\, g_{44}\, r_6 \\ r_4' = -g_{23}^2\, r_1 \\ r_5' = g_{23}\, g_{14}\, r_5 + g_{14}\, g_{33}\, r_6 \\ r_6' = -g_{23}\, g_{14}\, r_6. \end{cases}$$

und die Bedingungen der Hauptgeraden:

$$(18) \begin{cases} -g_{14}^2\,(\lambda_1^2 - \rho)\, r_4 = 0, \\ \quad g_{23}\, g_{14}\,(\lambda_1\, \lambda_2 - \rho)\, r_2 + g_{23}\,(\lambda_2\, f_{44} - \rho g_{44})\, r_6 = 0 \\ \quad g_{14}\,(\lambda_1\, f_{33} - \rho g_{33})\, r_2 - g_{23}\, g_{14}\,(\lambda_1\, \lambda_2 - \rho)\, r_3 + g_{23}\,(\lambda_2\, f_{44} - \rho g_{44}) \\ \qquad\qquad r_5 + (f_{33}\, f_{44} - \rho g_{33}\, g_{44})\, r_6 = 0 \\ -g_{23}^2\,(\lambda_2^2 - \rho)\, r_1 = 0 \\ \quad g_{23}\, g_{14}\,(\lambda_1\, \lambda_2 - \rho)\, r_5 + g_{14}\,(\lambda_1\, f_{33} - \rho g_{33})\, r_6 = 0 \\ -g_{23}\, g_{14}\,(\lambda_1\, \lambda_2 - \rho)\, r_6 = 0 \end{cases}$$

Sie geben für

(19) $\rho = \lambda_1 \lambda_2$: $r_6 = 0$, $r_4 = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $r_5 = 0$, die Kante $J_1 J_2$, die sich selbst entspricht und gemeinsame Erzeugende beider Flächen f und g ist, weiter für

$$(19) \begin{cases} \rho = \lambda_1^2: \quad r_6 = 0,\ r_2 = 0,\ r_1 = 0,\ r_5 = 0,\ r_3 = 0, \text{ Kante } J_1\, J_4, \\ \rho = \lambda_2^2: \quad r_6 = 0,\ r_2 = 0,\ r_4 = 0,\ r_5 = 0,\ r_3 = 0, \text{ Kante } J_2\, J_3, \end{cases}$$

die beiden Kanten $J_2 J_3$ und $J_1 J_4$, die sich nach (17) gegenseitig entsprechen.

6. Grundkurve. Die beiden im Büschel (13) enthaltenen Kegel:

$$(20)\begin{cases} f-\lambda_1 g=(f_{33}-\lambda_1 g_{33})y_3^2+(f_{44}-\lambda_1 g_{44})y_4^2+2(\lambda_2-\lambda_1)g_{14}y_1y_4=0, \\ f-\lambda_2 g=(f_{33}-\lambda_2 g_{33})y_3^2+(f_{44}-\lambda_2 g_{44})y_4^2+2(\lambda_1-\lambda_2)g_{14}y_1y_4=0, \end{cases}$$

haben die Kante $J_1 J_2$ gemein, so daß die Grundkurve des Büschels eine Raumkurve 3. Ordnung mit Sehne ist.

7. Der Fall III, 5. Im Falle III, 5 gehört zur vierfachen Wurzel $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$ ($l_1 = 4$, $l_1' = 2$, $l_1'' = 0$) eine Hauptpunktreihe und ein Hauptebenenbüschel, dessen Achse nach § 2, XIII mit der Reihe zusammenfällt und gemeinsame Erzeugende der beiden Grundflächen ist.

Liegen also die Punkte J_1 und J_2 vorläufig beliebig auf der Hauptpunktreihe, so ist nach § 2, IIb:

$$(21)\qquad f_{11} = \lambda_1 g_{11} = 0, \qquad f_{22} = \lambda_1 g_{22} = 0,$$

und da jeder Punkt einer Erzeugenden harmonischer Pol jedes anderen ist:

$$(21)\qquad f_{12} = 0, \qquad g_{12} = 0.$$

Ist nun i_4 die zu J_1 und i_3 die zu J_2 gehörige Hauptebene im Büschel, so ist, da J_3 in i_4 und J_4 in i_3 liegt, nach § 2, IIa:

$$(22)\qquad f_{13} = \lambda_1 g_{13} = 0, \qquad f_{14} = \lambda_1 g_{14} = 0,$$

und da J_4 nicht in i_4, ebenso J_3 nicht in i_3 liegt, nach § 2, II:

$$(22)\qquad f_{14} = \lambda_1 g_{14} \neq 0, \qquad f_{23} = \lambda_1 g_{23} \neq 0.$$

Wir erhalten also die Gleichungen (3) mit $\lambda_1 = \lambda_2$.

8. Das Ebenenpaar. Das Ebenenpaar $\lambda = \lambda_1$ erhält nach (3) die Gleichung

$$(23)\qquad (f_{33} - \lambda_1 g_{33})\, y_3^2 + (f_{44} - \lambda_1 g_{44})\, y_4^2 + 2\,(f_{34} - \lambda_1 g_{34})\, y_3 y_4 = 0,$$

wo nach (4):

$$(24)\qquad \delta_{66}(\lambda) = (f_{33} - \lambda_1 g_{33})\,(f_{44} - \lambda_1 g_{44}) - (f_{34} - \lambda_1 g_{34})^2 \neq 0$$

sein muß, als die einzige für $\lambda = \lambda_1$ nicht verschwindende ($l_1'' = 0$) Unterdeterminante $\delta_{kl}(\lambda)$.

Das Ebenenpaar (23) ist daher stets ein getrenntes.

9. Hauptgerade. Mit (3) bleiben auch die Gleichungen (6) und (7) bei Bestand. Die letzteren geben mit $\lambda_2 = \lambda_1$ für $\rho = \lambda_1^2$ zunächst:

$$g_{23}(f_{34} - \lambda_1 g_{34}) r_6 = 0, \quad g_{14}(f_{33} - \lambda_1 g_{33}) r_6 = 0, \quad -g_{14}(f_{34} - \lambda_1 g_{34}) r_6 = 0,$$
$$g_{23}(f_{44} - \lambda_1 g_{44}) r_6 = 0$$

und damit wegen (24) jedenfalls $r_6 = 0$, dann aber noch die mit $r_6 = 0$ reduzierte letzte Gleichung (7). Daher sind die Hauptgeraden bestimmt durch die Gleichungen:

$$(25)\begin{cases} r_6 = 0 \\ g_{23}(f_{34} - \lambda_1 g_{34}) r_1 + g_{14}(f_{33} - \lambda_1 g_{33}) r_2 - g_{14}(f_{34} - \lambda_1 g_{34}) r_4 \\ \qquad + g_{23}(f_{44} - \lambda_1 g_{44}) r_5 = 0. \end{cases}$$

Es gibt also ∞^2 Hauptgerade, welche wegen $r_6 = 0$ alle die Kante $J_1 J_2$, die selbst zu den Hauptgeraden gehört, schneiden. Also nicht alle ∞^3 Transversalen der Kante $J_1 J_2$ sind Hauptgerade, es bleibt noch zu untersuchen, welche von diesen sämtlichen Transversalen durch die Gleichungen (25) herausgegriffen werden.

Ist $J' = y_1' y_2' 0 0$ ein Punkt der Kante $J_1 J_2$ und $y_1 y_2 y_3 y_4$ der laufende Punkt J einer durch J_0 gehenden Geraden r, so sind die Strahlenkoordinaten von r:

$$r = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{vmatrix} = y_2' y_3, \quad -y_1' y_3, \quad y_1' y_2 - y_2' y_1, \quad y_1' y_4, \quad y_2' y_4, \quad 0.$$

Soll r den Gleichungen (25) genügen, so muß der laufende Punkt J der Gleichung genügen:

$$g_{23}(f_{34} - \lambda_1 g_{34}) y_2' y_3 - g_{14}(f_{33} - \lambda_1 g_{33}) y_1' y_3 - g_{14}(f_{34} - \lambda_1 g_{34}) y_1' y_4$$
$$+ g_{23}(f_{44} - \lambda_1 g_{44}) y_2' y_4 = 0$$

oder

$$(26) \qquad \{g_{14}(f_{33} - \lambda_1 g_{33}) y_1' - g_{23}(f_{34} - \lambda_1 g_{34}) y_2'\} y_3 +$$
$$\{g_{44}(f_{34} - \lambda_1 g_{34}) y_1' - g_{23}(f_{44} - \lambda_1 g_{44}) y_2'\} y_4 = 0.$$

Zu jedem Punkte J' der Hauptpunktreihe $J_1 J_2$ gehört eine bestimmte Ebene (26) des Hauptebenenbüschels $i_3 \times i_4$, in der die ∞^1 durch J' gehenden Hauptgeraden liegen, die „Hauptgeradenebene" des Punktes J'.

Sie ist stets bestimmt, da die beiden Koeffizienten von y_3 und y_4 in (26) nach (24) für keinen Punkt J' beide zugleich verschwinden können.

10. Paarweise Anordnung der Hauptpunkte. Die Ebene (26) ist aber nicht die zu J' gehörige Hauptebene, die als Polarebene von J' in bezug auf f und g nach (3) mit $\lambda_1 = \lambda_2$ die Gleichung hat:

$$g_{23}\, y_2'\, y_3 + g_{14}\, y_1'\, y_4 = 0. \tag{27}$$

Zu jedem Hauptpunkte J' auf $J_1 J_2$ gehören jetzt zwei Hauptebenen, von denen die eine (27) seine Polarebene, die andere (26) seine Hauptgeradenebene ist, in der alle durch J' gehenden Hauptgeraden liegen.

Beide Ebenen fallen nur zusammen, wenn:

$$g_{14}\, y_1' \left\{g_{14}\,(f_{33} - \lambda_1\, g_{33})\, y_1' - g_{23}\,(f_{34} - \lambda_1\, g_{34})\, y_2'\right\}$$
$$- g_{23}\, y_2' \left\{g_{14}\,(f_{34} - \lambda_1\, g_{34})\, y_1' - g_{23}\,(f_{44} - \lambda_1\, g_{44})\, y_2'\right\} = 0$$

oder

$$g_{14}^2\,(f_{33} - \lambda_1\, g_{33})\, y_1'^2 - 2\, g_{23}\, g_{14}\,(f_{34} - \lambda_1\, g_{34})\, y_1'\, y_2' + g_{23}^2\,(f_{44} - \lambda_1\, g_{44})\, y_2'^2 = 0 \tag{28}$$

ist, also für zwei bestimmte, nach (24) getrennte Punkte der Hauptpunktreihe $J_1 J_2$.

Da die Polarebene eines solchen Punktes, mit diesem vereinigt liegend, die Tangentialebene von f und g in ihm ist, so sind alle durch diesen Punkt gehenden Hauptgeraden Tangenten in ihm, die sich paarweise als konjugierte Tangenten entsprechen.

Im Allgemeinen dagegen ist die Hauptgeradenebene (26) des Punktes J' die Polarebene eines anderen Punktes J'' auf $J_1 J_2$:

$$g_{23}\, y_2''\, y_3 + g_{14}\, y_1''\, y_4 = 0, \tag{29}$$

der sich nach (26) und (29) bestimmt aus der Gleichung:

$$g_{14}\, y_1'' \left\{g_{14}\,(f_{33} - \lambda_1\, g_{33})\, y_1' - g_{23}\,(f_{34} - \lambda_1\, g_{34})\, y_2'\right\}$$
$$- g_{23}\, y_2'' \left\{g_{14}\,(f_{34} - \lambda_1\, g_{34})\, y_1' - g_{23}\,(f_{44} - \lambda_1\, g_{44})\, y_2'\right\} = 0$$

oder:

$$g_{14}^2\,(f_{33} - \lambda_1\, g_{33})\, y_1'\, y_1'' - g_{23}\, g_{14}\,(f_{34} - \lambda_1\, g_{34})\,(y_1'\, y_2'' + y_2'\, y_1'') + g_{23}^2\,(f_{44} - \lambda_1\, g_{44})\, y_2'\, y_2'' = 0. \tag{30}$$

Da diese Gleichung in J' und J'' symmetrisch ist, so folgt:

Je zwei Punkte J' und J'' der Hauptpunktreihe $J_1 J_2$ stehen in der Beziehung zueinander, daß die Hauptgeradenebene des einen die Hauptebene des andern ist, daß also die ∞^1 durch den einen gehenden Hauptgeraden

in der Polarebene des andern in bezug auf f und g liegen. (Staude, Journal f. Math. Bd. 156, S. 11).

Mit $J'' = J'$ erhalten wir aus (30) die zwei besonderen Punkte (28), für die die Hauptgeradenebene und die Polarebene zusammenfallen.

11. Wahl der Punkte J_1 und J_2. Die Punkte J_1 und J_2 waren in § 5, 7 auf der Hauptpunktreihe $J_1 J_2$ beliebig angenommen. Nun gehört zu jedem Punkte der Hauptpunktreihe eine und nur eine Polarebene in bezug auf f und g. Wir wählen nun erstens die Ecken J_1 und J_2 auf der Reihe so aus, daß keine der nach (22) zu ihnen gehörigen Hauptebenen i_4 und i_3 dem Ebenenpaar (23) angehört, daß also entsprechend (5)

(31) $$f_{33} - \lambda_1 g_{33} \neq 0, \qquad f_{44} - \lambda_1 g_{44} \neq 0$$

gelten muß. Weiter aber wählen wir die beiden Punkte J_1 und J_2 so aus, daß sie in der Beziehung (30) zueinander stehen, daß also die Gleichung (30) mit $y_1' = 1$, $y_2' = 0$, $y_1'' = 0$, $y_2'' = 1$ erfüllt wird. Dazu muß sein

(32) $$f_{34} - \lambda_1 g_{34} = 0.$$

Dann liegen die ∞^1 durch J_1 gehenden Hauptgeraden in der Polarebene i_3 von J_2 und die ∞^1 durch J_2 gehenden Hauptgeraden in der Polarebene i_4 von J_1.

Es sind also, da nach (22) J_3 in i_4 und J_4 in i_3 beliebig liegt, die Kanten $J_1 J_4$ und $J_2 J_3$ Hauptgerade, aber zunächst nicht einander entsprechende Hauptgerade.

Zwischen einander entsprechenden Geraden bestehen die Gleichungen (6) mit $\lambda_2 = \lambda_1$, wie vor (25) erwähnt. Danach entspricht der Hauptgeraden $J_2 J_3 = 1, 0, 0, 0, 0, 0$ mit Rücksicht auf (32) die Hauptgerade:

(33) $$r_1' = 0, \quad r_2' = 0, \quad r_3' = g_{34}, \quad r_4' = -g_{23}, \quad r_5' = 0, \quad r_6' = 0$$

und der Hauptgeraden $J_1 J_4 = 0, 0, 0, 1, 0, 0$ die Hauptgerade:

(34) $$r_1' = g_{14}, \quad r_2' = 0, \quad r_3' = g_{34}, \quad r_4' = 0, \quad r_5' = 0, \quad r_6' = 0.$$

Wählen wir also von den in ihren Ebenen i_3 und i_4 um J_1 und J_2 drehbaren Hauptgeraden $J_1 J_4$ und $J_2 J_3$ die eine beliebig und die andre als ihre reziproke Polare, so wird in (33) und (34): $g_{34} = 0$ und mit Hinblick auf (32):

(35) $$f_{34} = 0, \qquad g_{34} = 0.$$

Damit ergeben sich auch für den Fall III, 5 die kanonischen Gleichungen (12), (13), (5), nur mit $\lambda_2 = \lambda_1$.

12. Nachprüfung. In der Tat folgt dann aus (14) und (15) für:

(36) $$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2: \quad J_1 \ldots J_2, \quad i_3 \ldots i_4.$$

Für die Determinante:

(37) $$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (\lambda_1 - \lambda) g_{14} \\ 0 & 0 & (\lambda_1 - \lambda) g_{23} & 0 \\ 0 & (\lambda_1 - \lambda) g_{32} & f_{33} - \lambda g_{33} & 0 \\ (\lambda_1 - \lambda) g_{41} & 0 & 0 & f_{44} - \lambda g_{44} \end{vmatrix}$$

sind die nicht identisch in λ verschwindenden Unterdeterminanten:

$$\Delta_{11}(\lambda) = -g_{23}^2 (f_{44} - \lambda g_{44}) (\lambda_1 - \lambda)^2, \quad \Delta_{22}(\lambda) = -g_{14}^2 (f_{33} - \lambda g_{33}) (\lambda_1 - \lambda)^2,$$
$$\Delta_{23}(\lambda) = g_{23}\, g_{14}^2 (\lambda_1 - \lambda)^3, \qquad \Delta_{14}(\lambda) = g_{23}^2\, g_{14} (\lambda_1 - \lambda)^3,$$

also mit Rücksicht auf (31): $l_1 = 4$, $l_1' = 2$; und da:

$$\delta_{66}(\lambda) = (f_{33} - \lambda_1 g_{33}) (f_{44} - \lambda_1 g_{44}) \neq 0,$$

auch $l_1'' = 0$.

13. Hauptgerade. Die dem Hauptpunkte $J' = y_1', y_2', 0, 0$ entsprechende Hauptebene ist nach (15):

(38) $$g_{23}\, y_2' \cdot y_3 + g_{14}\, y_1' \cdot y_4 = 0$$

die gemeinsame Tangentialebene der beiden Flächen (12) im Punkte J'. Für die Hauptgeraden wird aus (25):

(39) $$r_6 = 0, \quad g_{14} (f_{33} - \lambda_1 g_{33})\, r_2 + g_{23} (f_{44} - \lambda_1 g_{44})\, r_5 = 0.$$

Die dem Punkte J' entsprechende Hauptgeradenebene (26) wird:

(40) $$g_{14} (f_{33} - \lambda_1 g_{33})\, y_1' y_3 - g_{23} (f_{44} - \lambda_1 g_{44})\, y_2' y_4 = 0.$$

Die beiden Ebenen (38) und (40) fallen nach (28) zusammen für die beiden Punkte:

(41) $$g_{14}^2 (f_{33} - \lambda_1 g_{33})\, y_1'^2 + g_{23}^2 (f_{44} - \lambda_1 g_{44})\, y_2'^2 = 0.$$

Für sie ist:

$$y_1^0 : y_2^0 = \pm i g_{23} \sqrt{f_{44} - \lambda_1 g_{44}} : g_{14} \sqrt{f_{33} - \lambda_1 g_{33}},$$

und die entsprechenden Hauptebenen sind nach (38):

$$g_{23}\, g_{14} \sqrt{f_{33} - \lambda_1 g_{33}} \cdot y_3 \pm i g_{14}\, g_{23} \sqrt{f_{44} - \lambda_1 g_{14}} \cdot y_4 = 0$$

oder beide zusammengefaßt:

(42) $$(f_{33} - \lambda_1 g_{33})\, y_3^2 + (f_{44} - \lambda_1 g_{44})\, y_4^2 = 0.$$

Das ist aber das Ebenenpaar (23) bei der jetzigen Annahme (32):

Die beiden Ebenen des dem Flächenbüschel (13) für $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ angehörigen Ebenenpaares (42) sind gerade diejenigen Hauptebenen, die mit den zu den entsprechenden Hauptpunkten gehörigen Hauptgeradenebenen zusammenfallen.

Sie sind die den Punkten (41) entsprechenden *Hauptebenen und Hauptgeradenebenen.*

Zu den Hauptgeraden (39) gehören *die drei Kanten* $J_1 J_2$, $J_1 J_4$ und $J_2 J_3$, die erste nach (17) sich selbst, die beiden anderen sich gegenseitig entsprechend.

Ist r eine durch J' gehende, also in der Ebene (40) gelegene Hauptgerade, so muß ihre entsprechende r' in der Polarebene (38) von J' liegen. Zwei entsprechende Hauptgeraden schneiden also die Kante $J_1 J_2$ in zwei Punkten J' und J'', die nach (30) durch die Gleichung:

$$(43) \qquad g_{14}^2 (f_{33} - \lambda_1 g_{33}) y_1' y_1'' + g_{23}^2 (f_{44} - \lambda_1 g_{44}) y_2' y_2'' = 0$$

verbunden sind. Zwei solche Hauptgerade r und r' sind im allgemeinen windschief, wie $J_1 J_4$ und $J_2 J_3$. Sollen sie vereinigt liegen, so müssen sie durch einen der Punkte (41) gehen.

14. Grundkurve. Zu der Grundkurve als Schnittkurve des Ebenenpaares (42) mit der Fläche g gehört zunächst doppelt zählend die Kante $J_1 J_4$, weil sie die Achse des Ebenenpaares und eine Erzeugende der Fläche g ist. Weiter gehören dazu zwei in den beiden Ebenen des Paares (42) liegende Erzeugende der Fläche g und der Fläche f, die als je sich selbst entsprechende Hauptgerade die Kante $J_1 J_2$ in den Punkten (41) treffen müssen.

Die Grundkurve besteht also aus der doppelt zählenden Kante $J_1 J_2$ und zwei durch die Punkte (41) dieser Kante gehenden, zu einander windschiefen Geraden.

Die außer einer solchen Geraden und der Kante $J_1 J_2$ durch J_1 oder J_2 gehenden Hauptgeraden ordnen sich paarweise als konjugierte Tangenten der Flächen f und g zusammen.

15. Andere Wahl der Punkte J_1 und J_2. Statt wie bei (32) legen wir jetzt die beiden Eckpunkte J_1 und J_2 gerade in das Punktepaar (28), so daß die Gleichung (28) mit $y_1' = 1$, $y_2' = 0$; $y_1' = 0$, $y_2' = 1$ erfüllt sein muß. Dazu ist erforderlich, daß mit Hinblick auf (24):

(44) $$f_{33} - \lambda_1 g_{33} = 0, \quad f_{44} - \lambda_1 g_{44} = 0, \quad f_{34} - \lambda_1 g_{34} \neq 0.$$

Dann ist die zu einem Punkte $J' = y_1', y_2', 0, 0$ gehörige Hauptebene wieder:

(27) $$g_{23} y_2' \cdot y_3 + g_{14} y_1' \cdot y_4 = 0,$$

dagegen die zu J' gehörige Hauptgeradenebene nach (26):

(45) $$g_{23} y_2' \cdot y_3 - g_{14} y_1' \cdot y_4 = 0.$$

Wie bei (22) bleibt dann i_4 die zu J_1, i_3 die zu J_2 gehörige Hauptebene, dagegen wird nach (45), umgekehrt wie bei (32), i_4 auch die Hauptgeradenebene von J_1, i_3 die Hauptgeradenebene von J_2. Dann liegen im Gegensatze zu (32) die ∞^1 durch J_1 gehenden Hauptgeraden in der Polarebene i_4 von J_1 und die ∞^1 durch J_2 gehenden Hauptgeraden in der Polarebene i_3 von J_2. Es sind also auch die Kanten $J_1 J_2$, $J_1 J_3$ und $J_2 J_4$ Hauptgerade. Die Hauptgerade $J_1 J_2$ entspricht sich nach (6) selbst. Dagegen entsprechen den Hauptgeraden $J_1 J_3 = 0, 1, 0, 0, 0, 0$ und $J_2 J_4 = 0, 0, 0, 0, 1, 0$ nach (6) mit $\lambda_2 = \lambda_1$ und mit Rücksicht auf (44) die Hauptgeraden:

$$\begin{cases} r_1' = 0, \; r_2' = \lambda_1^2 g_{23} g_{14}, \; r_3' = \lambda_1^2 g_{14} g_{33}, \; r_4' = 0, \; r_5' = 0, \; r_6' = 0; \\ r_1' = 0, \; r_2' = 0, \; r_3' = \lambda_1^2 g_{23} g_{44}, \; r_4' = 0, \; r_5' = \lambda_1^2 g_{23} g_{14}, \; r_6' = 0; \end{cases}$$

oder

(46) $$\begin{cases} y_4 = 0, \quad g_{23} y_2 + g_{33} y_3 = 0; \quad \text{und} \\ y_3 = 0, \quad g_{14} y_1 + g_{44} y_4 = 0, \end{cases}$$

die wieder in i_4 durch J_1 und in i_3 durch J_2 gehen. Da sich nun die Hauptgeraden in i_4 durch J_1 in Paare konjugierter Tangenten ordnen, so muß außer $J_1 J_2$ noch eine zweite dieser Hauptgeraden mit ihrer entsprechenden zusammenfallen. Wählen wir also für die in i_4 um J_1 drehbare Kante $J_1 J_3$ jene zweite sich selbst entsprechende und verfahren wir ebenso mit der Kante $J_2 J_4$, so muß in (46): $g_{33} = 0$, $g_{44} = 0$ und damit nach (44) werden:

(47) $$f_{33} = 0, \quad g_{33} = 0, \quad f_{44} = 0, \quad g_{44} = 0.$$

16. Neue Form der Gleichungen. Damit ergeben sich aus (3) für den Fall III, 5 die kanonischen Gleichungen:

$$(48)\quad \begin{cases} f = 2\lambda_1 g_{23} y_2 y_3 + 2\lambda_1 g_{14} y_1 y_4 + 2 f_{34} y_3 y_4 = 0, \\ g = 2 g_{23} y_2 y_3 + 2 g_{14} y_1 y_4 + 2 g_{34} y_3 y_4 = 0 \end{cases}$$

$$(49)\quad f_{34} - \lambda_1 g_{34} = 0$$

$$(50)\quad f - \lambda g = 2(\lambda_1 - \lambda)(g_{23} y_2 y_3 + g_{14} y_1 y_4) + 2(f_{34} - \lambda g_{34}) y_3 y_4 = 0.$$

Das Ebenenpaar $\lambda = \lambda_1$ des Büschels besteht jetzt aus den Ebenen i_3 und i_4 des Koordinatentetraeders. Für die Determinante:

$$(51)\quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & (\lambda_1 - \lambda) g_{14} \\ 0 & 0 & (\lambda_1 - \lambda) g_{23} & 0 \\ 0 & (\lambda_1 - \lambda) g_{32} & 0 & f_{34} - \lambda g_{34} \\ (\lambda_1 - \lambda) g_{41} & 0 & f_{43} - \lambda g_{43} & 0 \end{vmatrix},$$

von der wir die Unterdeterminanten

$$\Delta_{12}(\lambda) = -(\lambda_1 - \lambda)^2 g_{23} g_{14} (f_{34} - \lambda g_{34}), \qquad \Delta_{14}(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^3 g_{23}^2 g_{14}$$

$$\Delta_{23}(\lambda) = -(\lambda_1 - \lambda)^3 g_{23} g_{14}^2;$$

$$\delta_{66}(\lambda) = -(f_{34} - \lambda g_{34})^2$$

angeben, ist $l_1 = 4$, $l_1' = 2$, $l_1'' = 0$. Für die Polarenbeziehung ist:

$$(52)\quad \begin{cases} \upsilon_1 = \lambda_1 g_{14} y_4, \quad \upsilon_2 = \lambda_1 g_{23} y_3, \quad \upsilon_3 = \lambda_1 g_{32} y_2 + f_{34} y_4, \\ \qquad \upsilon_4 = \lambda_1 g_{41} y_1 + f_{43} y_3; \\ \upsilon_1 = g_{14} y_4, \quad \upsilon_2 = g_{23} y_3, \quad \upsilon_3 = g_{32} y_2 + g_{34} y_4, \\ \qquad \upsilon_4 = g_{41} y_1 + g_{43} y_3. \end{cases}$$

Die Gleichungen für die Hauptpunkte:

$$(53)\quad (\lambda_1 - \lambda) g_{14} y_4 = 0, \quad (\lambda_1 - \lambda) g_{23} y_3 = 0, \quad (\lambda_1 - \lambda) g_{32} y_2 + (f_{34} - \lambda g_{34}) y_4 = 0, \quad (\lambda_1 - \lambda) g_{41} y_1 + (f_{43} - \lambda g_{43}) y_3 = 0$$

geben mit Rücksicht auf (52) für:

$$(54)\quad \lambda = \lambda_1: \quad J_1 \dots J_2, \quad i_3 \dots i_4.$$

Für die Hauptgeraden folgt aus (25):

$$(55)\quad r_6 = 0, \quad g_{23} r_1 - g_{14} r_4 = 0.$$

Zwischen entsprechenden Hauptgeraden bestehen daher nach (6) die Beziehungen:

$$(56)\quad r_1' = g_{14}^2 r_4, \quad r_2' = g_{23} g_{14} r_2, \quad r_3' = -g_{23} g_{14} r_3, \quad r_4' = -g_{23}^2 r_1, \quad r_5' = g_{23} g_{14} r_5, \quad r_6' = 0.$$

Die drei Kanten $J_1 J_2$, $J_1 J_3$ und $J_2 J_4$ sind je sich selbst entsprechende Hauptgerade, also gemeinsame Erzeugende der beiden Flächen (48).

In der Tat schneidet die Ebene $y_3 = 0$ des Ebenenpaares $\lambda = \lambda_1$ die Flächen f und g in $y_1 y_4 = 0$, also in $J_2 J_4$ und $J_1 J_2$,

die Ebene $y_4 = 0$ des Ebenenpaares die Flächen f und g in $y_2 y_3 = 0$, also in $J_1 J_3$ und $J_1 J_2$. Die Grundkurve besteht also aus der doppelten Kante $J_1 J_2$ und den Kanten $J_1 J_3$ und $J_2 J_4$.

17. Übersicht der kanonischen Gleichungs formen III. Die beiden Gleichungsformen der Fälle III lauten:

$$(12) \quad \begin{cases} f = f_{33} y_3^2 + f_{44} y_4^2 + 2 \lambda_2 g_{23} y_2 y_3 + 2 \lambda_1 g_{14} y_1 y_4 = 0, \\ g = g_{33} y_3^2 + g_{44} y_4^2 + 2 g_{23} y_2 y_3 + 2 g_{14} y_1 y_4 = 0, \end{cases}$$

$$(5) \qquad f_{44} - \lambda_1 g_{44} \neq 0, \qquad f_{33} - \lambda_2 g_{33} \neq 0,$$

mit den Unterfällen

$$3.\ \lambda_2 \neq \lambda_1, \qquad 5.\ \lambda_2 = \lambda_1$$

und

$$(48) \quad \begin{cases} f = 2 \lambda_1 g_{31} y_3 y_1 + 2 \lambda_1 g_{24} y_2 y_4 + 2 f_{34} y_3 y_4 = 0 \\ g = 2 g_{31} y_3 y_1 + 2 g_{24} y_2 y_4 + 2 g_{34} y_3 y_4 = 0 \end{cases}$$

$$(49) \qquad f_{34} - \lambda_1 g_{34} \neq 0$$

für den Fall 5.

Bei der Form (12) sind die Ecken:

J_1 zu $J_1 J_2 J_3$; J_2 zu $J_1 J_2 J_4$; J_3 zu $J_1 J_4$; J_4 zu $J_2 J_3$

in bezug auf beide Flächen harmonische Pole, bei der Form (48) die Ecken:

J_1 zu $J_1 J_2 J_4$; J_2 zu $J_1 J_2 J_3$; J_3 zu $J_2 J_3$; J_4 zu $J_1 J_4$.

Bei der Form (12) sind die Kanten:

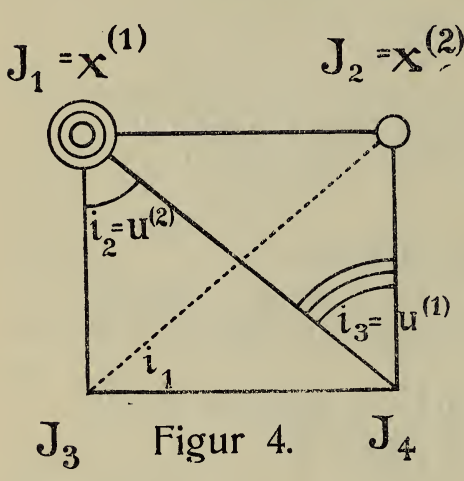
$J_1 J_2$ zu $J_1 J_2$; $J_2 J_3$ zu $J_1 J_4$

in bezug auf beide Flächen reziproke Polaren; bei der Form (48) die Kanten:

$J_1 J_2$ zu $J_1 J_2$; $J_2 J_3$ zu $J_2 J_3$; $J_1 J_4$ zu $J_1 J_4$.

§ 6. Die Fälle IV.

1. Die Hauptpunkte und Hauptebenen. Zur dreifachen Wurzel $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4$ ($l_1 = 3$, $l_1' = 0$) gehört ein Hauptpunkt $x^{(1)}$ und eine Hauptebene $u^{(1)}$, zur einfachen Wurzel λ_2 ($l_2 = 1$, $l_2' = 0$) ein Hauptpunkt $x^{(2)}$ und eine Hauptebene $u^{(2)}$.



Figur 4.

Nach § 1, IV liegt $u^{(1)}$ mit $x^{(2)}$ und $u^{(2)}$ mit $x^{(1)}$ vereinigt, nach § 2, VIII $u^{(1)}$ mit $x^{(1)}$ vereinigt, aber $u^{(2)}$ mit $x^{(2)}$ nicht vereinigt.

Wir nehmen für das neue Tetraeder:

$$J_1 = x^{(1)}, \quad J_2 = x^{(2)},$$
$$i_3 = u^{(1)}, \quad i_2 = u^{(2)},$$

womit auch die Kanten $J_1 J_2$ und $i_2 \times i_3$ festgelegt sind. J_3 bleibt in i_2 und J_4 auf $i_2 \times i_3$ verschiebbar.

Für die neuen Koeffizienten gelten dann nach § 2, (4) die Angaben der folgenden Übersicht (Fig. 4):

$$(1) \begin{cases} \left.\begin{matrix} J_1 \text{ Hp. zu } \lambda_1 \\ i_3 \text{ He. zu } J_1 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} J_1 \text{ auf } i_3: \quad J_2 \text{ auf } i_3: \quad J_3 \text{ nicht auf } i_3: \\ f_{11} = \lambda_1 g_{11} = 0,\ f_{12} = \lambda_1 g_{12} = 0,\ f_{13} = \lambda_1 g_{13} \neq 0, \\ J_4 \text{ auf } i_3: f_{14} = \lambda_1 g_{14} = 0; \end{matrix} \\ \left.\begin{matrix} J_2 \text{ Hp. zu } \lambda_2 \\ i_2 \text{ He. zu } J_2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} J_1 \text{ auf } i_2: \quad J_2 \text{ nicht auf } i_2: \quad J_3 \text{ auf } i_2; \\ f_{21} = \lambda_2 g_{21} = 0,\ f_{22} = \lambda_2 g_{22} \neq 0,\ f_{23} = \lambda_2 g_{23} = 0, \\ J_4 \text{ auf } i_2: f_{24} = \lambda_2 g_{24} = 0. \end{matrix} \end{cases}$$

2. Vorläufige Gleichungen. Damit wird zunächst:

$$(2) \begin{cases} f = \lambda_2 g_{22} y_2^2 + f_{33} y_3^2 + f_{44} y_4^2 + 2 \lambda_1 g_{31} y_3 y_1 + 2 f_{34} y_3 y_4 = 0 \\ g = g_{22} y_2^2 + g_{33} y_3^2 + g_{44} y_4^2 + 2 g_{31} y_3 y_1 + 2 g_{34} y_3 y_4 = 0 \end{cases}$$

$$(3)\qquad f-\lambda g=(\lambda_2-\lambda)\,g_{22}\,y_2^2+(f_{33}-\lambda g_{33})\,y_3^2+(f_{44}-\lambda g_{44})\,y_4^2$$
$$+\,2\,(\lambda_1-\lambda)\,g_{31}\,y_3\,y_1+2\,(f_{34}-\lambda g_{34})\,y_3\,y_4=0.$$

Das Büschel (3) enthält mit $\lambda=\lambda_1$ den Kegel:

$$(4)\qquad (\lambda_2-\lambda_1)\,g_{22}\,y_2^2+(f_{33}-\lambda_1\,g_{33})\,y_3^2+(f_{44}-\lambda_1\,g_{44})\,y_4^2+$$
$$2\,(f_{34}-\lambda_1\,g_{34})\,y_3\,y_4=0.$$

Da die Determinante

$$(5)\quad \Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & (\lambda_1-\lambda)\,g_{13} & 0 \\ 0 & (\lambda_2-\lambda)\,g_{22} & 0 & 0 \\ (\lambda_1-\lambda)\,g_{13} & 0 & f_{33}-\lambda g_{33} & f_{34}-\lambda g_{34} \\ 0 & 0 & f_{43}-\lambda g_{43} & f_{44}-\lambda g_{44} \end{vmatrix}$$
$$=-\,g_{31}^2\,(\lambda_1-\lambda)^2\,g_{22}\,(\lambda_2-\lambda)\,(f_{44}-\lambda g_{44})$$

die dreifache Wurzel λ_1 haben soll, muß sein:

$$(6)\qquad f_{44}-\lambda_1\,g_{44}=0,$$

und da für $\lambda=\lambda_1$ nicht alle $\Delta_{kl}(\lambda)$ verschwinden dürfen, muß

$$(7)\qquad f_{34}-\lambda_1\,g_{34}\neq 0.$$

Der Kegel (4) schneidet die Hauptebene i_3 in dem Linienpaar:

$$(\lambda_2-\lambda)\,g_{22}\,y_2^2+(f_{44}-\lambda_1\,g_{44})\,y_4^2=0,$$

welches sich wegen (6) auf eine Doppellinie $y_2^2=0$, $y_3=0$ zusammenzieht.

D e r d r e i f a c h z ä h l e n d e K e g e l $\lambda=\lambda_1$ b e r ü h r t l ä n g s d e r K a n t e $J_1 J_4$ d i e H a u p t e b e n e i_3, d i e i n d e r S p i t z e J_1 d e s K e g e l s T a n g e n t i a l e b e n e b e i d e r F l ä c h e n (2) i s t. (Lüroth'scher Satz).

Die Grundkurve $f\times g$, die in erster Annäherung $i_3\times f-\lambda_1 g$ ist, hat daher in J_1 eine Spitze.

3. Wahl von J_3. Die Grundkurve des Büschels (3) kann als Schnittkurve der Flächen $g=0$ und $f-\lambda_1 g=0$ aufgefaßt werden. Die Fläche $g=0$ schneidet die Ebene i_2 in dem eigentlichen Kegelschnitt:

$$(8)\qquad g_{33}\,y_3^2+g_{44}\,y_4^2+2\,g_{31}\,y_3\,y_1+2\,g_{34}\,y_3\,y_4=0,$$

der die Seite $y_3=0$ des Dreiecks $J_1\,J_3\,J_4$ in J_1 berührt. Der Kegel $f-\lambda_1\,g=0$ schneidet die Ebene i_2 in dem Linienpaare

$$(9)\qquad \{(f_{33}-\lambda_1\,g_{33})\,y_3+2\,(f_{34}-\lambda_1\,g_{34})\,y_4\}\,y_3=0,$$

zu dem die Seite $y_3=0$ und eine nach (7) von $y_3=0$ verschiedene, durch J_1 gehende Gerade gehört. Demnach fallen von den v i e r Schnittpunkten der Kurven (8) und (9) d r e i in den Punkt J_1, der Doppelpunkt des Linienpaares (9) ist, während eine Linie des Paares (9) in ihm den Kegelschnitt (8)

berührt. Es bleibt dann noch e i n nicht auf $J_1 J_4$ liegender Schnittpunkt von (8) und (9) übrig, der auch auf $f = 0$ liegt. In diesen legen wir den in i_2 verschiebbaren Punkt J_3, womit

$$(10) \qquad f_{33} = 0, \qquad g_{33} = 0.$$

4. Endgültige Gleichungen. Danach erhalten wir die Gleichungen:

$$(11) \quad \begin{cases} f = \lambda_2 g_{22} y_2^2 + \lambda_1 g_{44} y_4^2 + 2 \lambda_1 g_{31} y_3 y_1 + 2 f_{34} y_3 y_4 = 0 \\ g = g_{22} y_2^2 + g_{44} y_4^2 + 2 g_{31} y_3 y_1 + 2 g_{34} y_3 y_4 = 0; \end{cases}$$

$$(12) \quad f - \lambda g = (\lambda_2 - \lambda) g_{22} y_2^2 + (\lambda_1 - \lambda) g_{44} y_4^2 + 2 (\lambda_1 - \lambda) g_{31} y_3 y_1 + 2 (f_{34} - \lambda g_{34}) y_3 y_4 = 0;$$

$$(13) \quad \begin{cases} u_1 = \lambda_1 g_{13} y_3 \\ u_2 = \lambda_2 g_{22} y_2 \\ u_3 = \lambda_1 g_{31} y_1 + f_{34} y_4 \\ u_4 = f_{43} y_3 + \lambda g_{44} y_4, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1 = g_{13} y_3 \\ u_2 = g_{22} y_2 \\ u_3 = g_{31} y_1 + g_{34} y_4 \\ u_4 = g_{43} y_3 + g_{44} y_4, \end{cases}$$

$$(7) \qquad f_{34} - \lambda_1 g_{34} \neq 0,$$

mit der Determinante

$$(14) \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & (\lambda_1 - \lambda) g_{13} & 0 \\ 0 & (\lambda_2 - \lambda) g_{22} & 0 & 0 \\ (\lambda_1 - \lambda) g_{31} & 0 & 0 & f_{34} - \lambda g_{34} \\ 0 & 0 & f_{43} - \lambda g_{43} & (\lambda_1 - \lambda) g_{44} \end{vmatrix}.$$

Die Gleichungen der Hauptpunkte:

$$(15) \quad \begin{cases} (\lambda_1 - \lambda) g_{13} y_3 = 0, \qquad (\lambda_2 - \lambda) g_{22} y_2 = 0, \\ (\lambda_1 - \lambda) g_{31} y_1 + (f_{34} - \lambda g_{34}) y_4 = 0, \\ (f_{43} - \lambda g_{43}) y_3 + (\lambda_1 - \lambda) g_{44} y_4 = 0 \end{cases}$$

geben für

$$(16) \qquad \lambda = \lambda_1 : \quad J_1,\ i_3; \qquad \lambda = \lambda_2 : \quad J_2,\ i_2.$$

5. Hauptgerade. Die Beziehungen zwischen reziproken Polaren der beiden Flächen (11) lauten:

$$(17) \quad \begin{cases} r_1' = \lambda_1^2 g_{31} g_{44} r_6 \\ r_2' = \lambda_2 g_{22} f_{34} r_1 + \lambda_1 \lambda_2 g_{22} g_{44} r_5 \\ r_3' = - \lambda_1 g_{31} f_{34} r_2 + \lambda_1^2 g_{31} g_{44} r_4 - f_{34}^2 r_6 \\ r_4' = - \lambda_1 \lambda_2 g_{22} g_{31} r_3 + \lambda_2 g_{22} f_{34} r_5 \\ r_5' = - \lambda_1^2 g_{31}^2 r_2 - \lambda_1 g_{31} f_{34} r_6 \\ r_6' = - \lambda_1 \lambda_2 g_{22} g_{31} r_1, \end{cases}$$

$$(17a)\begin{cases} \mathfrak{r}_1' = g_{31}\, g_{44}\, \mathfrak{r}_6 \\ \mathfrak{r}_2' = g_{22}\, g_{34}\, \mathfrak{r}_1 + g_{22}\, g_{44}\, \mathfrak{r}_5 \\ \mathfrak{r}_3' = - g_{31}\, g_{34}\, \mathfrak{r}_2 + g_{31}\, g_{44}\, \mathfrak{r}_4 - g_{34}^2\, \mathfrak{r}_6 \\ \mathfrak{r}_4' = - g_{22}\, g_{31}\, \mathfrak{r}_3 + g_{22}\, g_{34}\, \mathfrak{r}_5 \\ \mathfrak{r}_5' = - g_{31}^2\, \mathfrak{r}_2 - g_{31}\, g_{34}\, \mathfrak{r}_6 \\ \mathfrak{r}_6' = - g_{22}\, g_{31}\, \mathfrak{r}_1 \end{cases}$$

und daher die Bedingungen der Hauptgeraden:

$$(18)\begin{cases} g_{31}\, g_{44}\, (\lambda_1^2 - \rho)\, \mathfrak{r}_6 = 0 \\ g_{22}\, (\lambda_2\, f_{34} - \rho g_{34})\, \mathfrak{r}_1 + g_{22}\, g_{44}\, (\lambda_1\, \lambda_2 - \rho)\, \mathfrak{r}_5 = 0 \\ - g_{31}\, (\lambda_1\, f_{34} - \rho g_{34})\, \mathfrak{r}_2 + g_{31}\, g_{44}\, (\lambda_1^2 - \rho)\, \mathfrak{r}_4 - (f_{34}^2 - \rho g_{34}^2)\, \mathfrak{r}_6 = 0 \\ - g_{22}\, g_{31}\, (\lambda_1\, \lambda_2 - \rho)\, \mathfrak{r}_3 + g_{22}\, (\lambda_2\, f_{34} - \rho g_{34})\, \mathfrak{r}_5 = 0 \\ - g_{31}^2\, (\lambda_1^2 - \rho)\, \mathfrak{r}_2 - g_{31}\, (\lambda_1\, f_{34} - \rho g_{34})\, \mathfrak{r}_6 = 0 \\ - g_{22}\, g_{31}\, (\lambda_1\, \lambda_2 - \rho)\, \mathfrak{r}_1 = 0 \end{cases}$$

Zu den beiden reziproken Wurzeln gehören die Hauptgeraden:

$$(19)\begin{cases} \rho = \rho_1 = \rho_3 = \rho_5 = \lambda_1 \lambda_2 : & \mathfrak{r}_6 = 0,\ \mathfrak{r}_1 = 0,\ \mathfrak{r}_2 = 0,\ \mathfrak{r}_4 = 0,\ \mathfrak{r}_5 = 0 : \\ & \text{Kante } J_1\, J_2, \\ \rho = \rho_2 = \rho_4 = \rho_6 = \lambda_1^2 : & \mathfrak{r}_1 = 0,\ \mathfrak{r}_6 = 0,\ \mathfrak{r}_2 = 0,\ \mathfrak{r}_5 = 0,\ \mathfrak{r}_3 = 0 : \\ & \text{Kante } J_1\, J_4, \end{cases}$$

beide Kanten sich gegenseitig entsprechend und, da sie sich in J_1 treffen, konjugierte Tangenten in der Hauptebene i_3.

6. Die Grundkurve. Die Grundkurve 4. O. kann als Schnitt der beiden Kegelflächen des Büschels (12) aufgefaßt werden:

$$(20)\begin{cases} (\lambda_2 - \lambda_1)\, g_{22}\, y_2^2 + 2\, (f_{34} - \lambda_1\, g_{34})\, y_3\, y_4 - 0, \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\, g_{44}\, y_4^2 + 2\, (\lambda_1 - \lambda_2)\, g_{31}\, y_3\, y_1 + 2\, (f_{34} - \lambda_2\, g_{34})\, y_3\, y_4 = 0. \end{cases}$$

Als Schnittlinie der beiden Flächen f und g, die sich in J_1 berühren, hat sie in J_1 eine Spitze, in der, wie unter 2 erwähnt, die Kante $J_1\, J_4$ Doppeltangente der Kurve ist. Die Grundkurve ist eine Kurve 4. O. mit Spitze.

7. Hauptelemente im Falle IV, 5. Zur vierfachen Wurzel $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ $(l_1 = 4,\ l_1' = 1,\ l_1'' = 0)$ gehört eine Reihe von Hauptpunkten $x^{(1)} \ldots . x^{(2)}$ und ein Büschel von Hauptebenen $u^{(2)} \ldots . u^{(3)}$. Reihe und Büschelachse haben nach § 2, XIII einen Punkt $x^{(1)}$ gemein und sind als sich schneidende Hauptgeraden konjugierte Tangenten beider Flächen f und g in $x^{(1)}$, wonach ihre Verbindungsebene $u^{(3)}$

Tangentialebene beider Flächen in $x^{(1)}$ und demnach die dem Punkte $x^{(1)}$ entsprechende Hauptebene ist.

Wir nehmen $x^{(1)}$ als J_1 und irgend einen anderen Punkt $x^{(2)}$ der Reihe als J_2, ferner die diesen Punkten entsprechenden Büschelebenen $u^{(3)}$ und $u^{(2)}$ als i_3 und i_2. Dann gelten wieder die Angaben (1), nur mit $\lambda_2 = \lambda_1$, also auch die Gleichungen (2), (3), (6), (7) mit $\lambda_2 = \lambda_1$.

8. Endgültige Gleichungen. Für die in i_2 liegenden Punkte der Grundkurve $f \times g$ gelten die Erwägungen unter 3, nur daß an Stelle des Kegels (4), (6) jetzt das Ebenenpaar:

(21) $$f - \lambda_1 g = (f_{33} - \lambda_1 g_{33}) y_3^2 + 2 (f_{34} - \lambda_1 g_{34}) y_3 y_4 = 0$$

tritt, welches wiederum die Ebene i_2 in dem Linienpaar (9) schneidet, so daß auch hier die Folgerung (10) gezogen werden kann.

Daher gelten auch für den Fall IV, 5 die kanonischen Gleichungen (11), (12), (13) mit $\lambda_2 = \lambda_1$.

In der Tat folgt dann aus (15) mit Rücksicht auf (7) und (13):

(22) $$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2: \qquad J_1 \ldots . J_2, \qquad i_2 \ldots . i_3.$$

Die Unterdeterminante

$$\Delta_{11}(\lambda) = -(\lambda_1 - \lambda) g_{22} (f_{34} - \lambda g_{34})^2$$

enthält den Faktor $\lambda_1 - \lambda$ nur einmal ($l_1' = 1$).

9. Die Grundkurve. Die Grundkurve $f - \lambda g \times g$ besteht aus den zwei Kegelschnitten, in denen das Ebenenpaar (21), (10):

$$y_3 \cdot y_4 = 0$$

die Fläche g schneidet. Da aber die eine Ebene i_3 des Paares in J_1 Tangentialebene von g ist (Lüroth'scher Satz), besteht der eine der beiden Kegelschnitte aus einem Linienpaare:

(23) $$g_{22} y_2^2 + g_{44} y_4^2 = 0, \qquad y_3 = 0.$$

Der andere, ein eigentlicher Kegelschnitt:

(24) $$g_{22} y_2^2 + 2 g_{31} y_3 y_1 = 0, \qquad y_4 = 0$$

geht durch den Doppelpunkt J_1 des Linienpaares.

10. Hauptgerade. Als Hauptgerade ergeben sich aus: (18) mit $\lambda_2 = \lambda_1$ für $\rho = \lambda_1^2$ die Geraden:

(25) $$r_1 = 0, \quad r_6 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_5 = 0; \quad y_3 = 0, \quad r_4 y_2 - r_3 y_4 = 0$$

alle Geraden in i_3 durch J_1. Sie sind paarweise konjugierte Tangenten beider Flächen, darunter das Kantenpaar $J_1 J_2$ und $J_1 J_4$ sich gegenseitig entsprechend.

Im Allgemeinen entsprechen sich die Hauptgeraden:

$$y_3 = 0, \; r_4 y_2 - r_3 y_4 = 0 \text{ und } y_3 = 0, \; g_{22} r_3 y_2 + g_{44} r_4 y_4 = 0.$$

Beide fallen nur zusammen für:

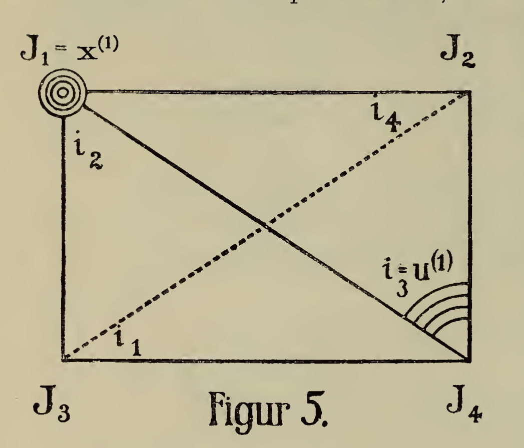
$$g_{22} r_3^2 + g_{44} r_4^2 = 0. \tag{26}$$

Es gibt also zwei Hauptgerade, die mit ihrer entsprechenden zusammenfallen. Es sind die beiden Geraden des Linienpaares (23), die gemeinsame Erzeugende von f und g sind.

---

§ 7. Der Fall V.

1. Hauptpunkt und Hauptebene. Im Fall V, 5 ist eine vierfache Wurzel λ_1 vorhanden, für die $l_1 = 4$, $l_1' = 0$ ist, so daß zu ihr ein bestimmter Hauptpunkt $x^{(1)}$ und eine bestimmte Hauptebene $u^{(1)}$ gehört. Beide liegen nach § 2, VIII vereinigt. Wir nehmen sie für das neue Koordinatentetraeder als J_1 und i_3 und legen J_2 und J_4 in i_3 und J_3 außerhalb i_3 beliebig. Dann gelten nach § 2, (4) die Angaben der folgenden Übersicht (Fig. 5):



Figur 5.

$$(1) \left\{\begin{array}{l} J_1 \text{ Hp. zu } \lambda_1 \\ i_3 \text{ He. zu } J_1 \end{array}\right\} : \begin{array}{ccc} J_1 \text{ auf } i_3: & J_2 \text{ auf } i_3: & J_3 \text{ nicht auf } i_3: \\ f_{11} = \lambda_1 g_{11} = 0, & f_{12} = \lambda_1 g_{12} = 0, & f_{13} = \lambda_1 g_{13} \neq 0, \end{array}$$
$$J_4 \text{ auf } i_3: f_{14} = \lambda_1 g_{14} = 0.$$

2. Die Determinante. Damit wird die Determinante:

$$(2)\quad \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g_{13}(\lambda_1 - \lambda) & 0 \\ 0 & f_{22} - \lambda g_{22} & f_{23} - \lambda g_{23} & f_{24} - \lambda g_{24} \\ g_{31}(\lambda_1 - \lambda) & f_{32} - \lambda g_{32} & f_{33} - \lambda g_{33} & f_{34} - \lambda g_{34} \\ 0 & f_{42} - \lambda g_{42} & f_{43} - \lambda g_{43} & f_{44} - \lambda g_{44} \end{vmatrix}$$
$$= - g_{13}^2 (\lambda_1 - \lambda)^2 \{(f_{22} - \lambda g_{22})(f_{44} - \lambda g_{44}) - (f_{24} - \lambda g_{24})^2\}.$$

Da aber die Determinante eine vierfache Wurzel haben soll, muß λ_1 auch Doppelwurzel der quadratischen Gleichung:

$$(3)\qquad (f_{22} - \lambda g_{22})(f_{44} - \lambda g_{44}) - (f_{24} - \lambda g_{24})^2 = 0$$

oder

$$(g_{22} g_{44} - g_{24}^2)\lambda^2 - (f_{22} g_{44} - 2 f_{24} g_{24} + f_{44} g_{22})\lambda + (f_{22} f_{44} - f_{24}^2) = 0$$

sein, also die Diskriminante:

(4) $(f_{22}\,g_{44} - 2f_{24}\,g_{24} + f_{44}\,g_{22})^2 - 4\,(f_{22}\,f_{44} - f_{24}^2)\,(g_{22}\,g_{44} - g_{24}^2) = 0$

sein. Dies gibt entwickelt:

$$f_{22}^2\,g_{44}^2 + 4\,f_{24}^2\,g_{24}^2 + f_{44}^2\,g_{22}^2 + 2\,f_{22}\,f_{44}\,g_{22}\,g_{44} - 4\,f_{22}\,g_{44}\,f_{24}\,g_{24}$$
$$-\,4\,f_{44}\,g_{22}\,f_{24}\,g_{24} - 4\,f_{22}\,f_{44}\,g_{22}\,g_{44} + 4\,f_{24}^2\,g_{22}\,g_{44} + 4\,f_{22}\,f_{44}\,g_{24}^2$$
$$-\,4\,f_{24}^2\,g_{24}^2 = 0$$

oder

(5) $$(f_{22}\,g_{44} - f_{44}\,g_{22})^2 + 4\,(f_{22}\,g_{24} - g_{22}\,f_{24})\,(f_{44}\,g_{24} - g_{44}\,f_{24}) = 0.$$

Dies ist also die Bedingung dafür, daß der zweite Faktor von $\Delta(\lambda)$ eine Doppelwurzel hat.

3. Vorhandensein einer Hauptgeraden. Die Gleichungen der Polarverwandtschaft beider Flächen sind im neuen Koordinatensystem:

(6) $$\begin{cases} \mathfrak{v}_1' = f_{13}\,y_3 \\ \mathfrak{v}_2' = f_{22}\,y_2 + f_{23}\,y_3 + f_{24}\,y_4 \\ \mathfrak{v}_3' = f_{31}\,y_1 + f_{32}\,y_2 + f_{33}\,y_3 + f_{34}\,y_4 \\ \mathfrak{v}_4' = f_{42}\,y_2 + f_{43}\,y_3 + f_{44}\,y_4 \end{cases}$$

(6a) $$\begin{cases} \mathfrak{v}_1' = g_{13}\,y_3 \\ \mathfrak{v}_2' = g_{22}\,y_2 + g_{23}\,y_3 + g_{24}\,y_4 \\ \mathfrak{v}_3' = g_{31}\,y_1 + g_{32}\,y_2 + g_{33}\,y_3 + g_{34}\,y_4 \\ \mathfrak{v}_4' = g_{42}\,y_2 + g_{43}\,y_3 + g_{44}\,y_4. \end{cases}$$

Einem Punkte $J_0 = y_1^0\,y_2^0\,0\,y_4^0$ der Ebene i_3 (wobei $J_0 \neq J_1$ und y_2^0, y_4^0 nicht beide $= 0$ seien) entsprechen die Ebenen:

(7) $$\begin{cases} i_0: \quad (f_{22}\,y_2^0 + f_{24}\,y_4^0)\,y_2 + (f_{31}\,y_1^0 + f_{32}\,y_2^0 + f_{34}\,y_4^0)\,y_3 \\ \qquad\qquad + (f_{42}\,y_2^0 + f_{44}\,y_4^0)\,y_4 = 0 \\ i_0': \quad (g_{22}\,y_2^0 + g_{24}\,y_4^0)\,y_2 + (g_{31}\,y_1^0 + g_{32}\,y_2^0 + g_{34}\,y_4^0)\,y_3 \\ \qquad\qquad + (g_{42}\,y_2^0 + g_{44}\,y_4^0)\,y_4 = 0, \end{cases}$$

die beide durch J_1 gehen. Der Geraden J_1J_0 entsprechen also als reziproke Polaren in bezug auf f und g die Geraden $i_3 \times i_0$ und $i_3 \times i_0'$ oder:

(8) $$\begin{cases} y_3 = 0, \quad (f_{22}\,y_2^0 + f_{24}\,y_4^0)\,y_2 + (f_{42}\,y_2^0 + f_{44}\,y_4^0)\,y_4 = 0 \\ y_3 = 0, \quad (g_{22}\,y_2^0 + g_{24}\,y_4^0)\,y_2 + (g_{42}\,y_2^0 + g_{44}\,y_4^0)\,y_4 = 0. \end{cases}$$

Wenn diese beiden Geraden zusammenfallen, ist $J_1\,J_0$ eine Hauptgerade. Wenn sie sogar beide nicht nur durch J_1, sondern auch durch J_0 gehen, so ist J_1J_0 eine sich selbst entsprechende Hauptgerade. Dies tritt aber ein unter den Bedingungen:

$$(9)\quad \begin{cases} f_{22}\, y_2^{0^2} + 2\, f_{24}\, y_2^0\, y_4^0 + f_{44}\, y_4^{0^2} = 0 \\ g_{22}\, y_2^{0^2} + 2\, g_{24}\, y_2^0\, y_4^0 + g_{44}\, y_4^{0^2} = 0. \end{cases}$$

Diese beiden quadratischen Gleichungen für $y_2^0 : y_4^0$ haben nun gerade unter der Bedingung (5), die die Eliminationsresultante der Gleichungen (9) ist, eine gemeinsame Wurzel:

$$(10)\qquad \frac{y_2^0}{y_4^0} = -\frac{1}{2}\,\frac{f_{22}\, g_{44} - g_{22}\, f_{44}}{f_{22}\, g_{24} - g_{22}\, f_{24}} = +\,2\,\frac{f_{44}\, g_{24} - g_{44}\, f_{24}}{f_{22}\, g_{44} - g_{22}\, f_{44}}.$$

E s m u ß a l s o d u r c h J_1 i n i_3 e i n e s i c h s e l b s t e n t s p r e c h e n d e H a u p t g e r a d e g e h e n.

4. Wahl von J_2. Legen wir nun J_2 auf diese sich selbst entsprechende Hauptgerade, die als solche gemeinsame Erzeugende von f und g ist, so wird:

$$(11)\qquad f_{22} = 0, \qquad g_{22} = 0,$$

und die Gleichungen (9) haben dann die Wurzel $y_4^0 = 0$ gemein, so daß eben J_0 ein Punkt der Kante $J_1\, J_2$ ist. Die Bedingung (3) gibt dann, da die Doppelwurzel zugleich λ_1 sein muß:

$$(12)\qquad f_{24} - \lambda_1\, g_{24} = 0.$$

Die Determinante wird

$$13)\ \Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g_{13}(\lambda_1 - \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & f_{23} - \lambda g_{23} & g_{24}(\lambda_1 - \lambda) \\ g_{31}(\lambda_1 - \lambda) & f_{32} - \lambda g_{32} & f_{33} - \lambda g_{33} & f_{34} - \lambda g_{34} \\ 0 & g_{42}(\lambda_1 - \lambda) & f_{43} - \lambda g_{43} & f_{44} - \lambda g_{44} \end{vmatrix}$$

$$= g_{13}^2\, g_{24}^2\, (\lambda_1 - \lambda)^4; \qquad g_{13} \neq 0, \quad g_{24} \neq 0.$$

(Damit dann nicht alle $\Delta_{kl}(\lambda_1)$ verschwinden, muß:

$$\Delta_{11}(\lambda_1) = -\,(f_{23} - \lambda_1\, g_{23})^2\, (f_{44} - \lambda_1\, g_{44}) \neq 0,$$

also

$$(14)\qquad f_{23} - \lambda_1\, g_{23} \neq 0, \qquad f_{44} - \lambda_1\, g_{44} \neq 0$$

sein.

5. Wahl von J_3. Die beiden eigentlichen Flächen:

$$(14a)\quad \begin{cases} f = f_{33}\, y_3^2 + f_{44}\, y_4^2 + 2\, f_{23}\, y_2\, y_3 + 2\, \lambda_1\, g_{31}\, y_3\, y_1 + 2\, \lambda_1\, g_{24}\, y_2\, y_4 \\ \qquad + 2\, f_{34}\, y_3\, y_4 = 0 \\ g = g_{33}\, y_3^2 + g_{44}\, y_4^2 + 2\, g_{23}\, y_2\, y_3 + 2\, g_{31}\, y_3\, y_1 + 2\, g_{24}\, y_2\, y_4 \\ \qquad + 2\, g_{34}\, y_3\, y_4 = 0 \end{cases}$$

schneiden die Ebene $y_3 = 0$ in den Linienpaaren:

$$y_3 = 0, \quad (f_{44}\, y_4 + 2\,\lambda_1\, g_{24}\, y_2)\, y_4 = 0;$$
$$y_3 = 0, \quad (g_{44}\, y_4 + 2\, g_{24}\, y_2)\, y_4 = 0,$$
also in der Kante $J_1\, J_2$ und den Geraden:
$$2\,\lambda_1\, g_{24}\, y_2 + f_{44}\, y_4 = 0 \qquad 2\, g_{24}\, y_2 + g_{44}\, y_4 = 0,$$
die nicht zusammenfallen können, da nach (14) $f_{44} - \lambda_1\, g_{44} \neq 0$. Die Ebene i_3 enthält also von der Schnittkurve $f \times g$ nur die Gerade $J_1\, J_2$, sodaß diese Schnittkurve nicht *ganz* in i_3 liegen kann, sondern außerhalb i_3 noch Punkte haben muß. In einen solchen Punkt legen wir die Ecke J_3, die außerhalb i_3 ja beliebig gewählt werden kann. Dann wird:

(15) $\qquad f_{33} = 0, \qquad g_{33} = 0.$

6. Wahl von J_4. Die Tangentialebenen der Flächen (14a) in J_3 sind nun:
$$\lambda_1\, g_{13}\, y_1 + f_{23}\, y_2 + f_{34}\, y_4 = 0, \qquad g_{13}\, y_1 + g_{23}\, y_2 + g_{34}\, y_4 = 0.$$
Sie schneiden die Ebene i_3 in dem Punkte:
$$y_1 : y_2 : y_4 = f_{23}\, g_{34} - f_{34}\, g_{23} : g_{13}\, (f_{34} - \lambda_1\, g_{34}) : g_{13}\, (\lambda_1\, g_{23} - f_{23}),$$
der nach (14) nicht auf der Kante $J_1\, J_2$ $(y_4 = 0)$ liegt und daher als J_4 genommen werden kann. Es ist dann:
$$g_{23}\, f_{34} - f_{23}\, g_{34} = 0$$
$$f_{34} - \lambda_1\, g_{34} = 0,$$
also nach (14):

(16) $\qquad f_{34} = 0, \qquad g_{34} = 0.$

In der Tat liegt J_4 auf den Polarebenen von J_3 in bezug auf f und g.

7. Endgültige Gleichungen. Die kanonischen Gleichungen werden also:

$$(17) \quad \begin{cases} f = f_{44}\, y_4^2 + 2\, f_{23}\, y_2\, y_3 + 2\,\lambda_1\, g_{31}\, y_3\, y_1 + 2\,\lambda_1\, g_{24}\, y_2\, y_4 = 0, \\ g = g_{44}\, y_4^2 + 2\, g_{23}\, y_2\, y_3 + 2\, g_{31}\, y_3\, y_1 + 2\, g_{24}\, y_2\, y_4 = 0; \end{cases}$$

$$(18) \quad f - \lambda g = (f_{44} - \lambda g_{44})\, y_4^2 + 2\,(f_{23} - \lambda g_{23})\, y_2\, y_3 + 2\,(\lambda_1 - \lambda)\,(g_{31}\, y_3\, y_1 + g_{24}\, y_2\, y_4) = 0;$$

$$(19) \quad f_{23} - \lambda_1\, g_{23} \neq 0, \quad f_{44} - \lambda_1\, g_{44} \neq 0, \quad g_{31} \neq 0, \quad g_{24} \neq 0.$$

Die Bedingungen für die Hauptpunkte werden:

$$(20) \quad \begin{cases} g_{13}\,(\lambda_1 - \lambda)\, y_3 = 0, \quad (f_{23} - \lambda g_{23})\, y_3 + g_{24}\,(\lambda_1 - \lambda)\, y_4 = 0, \\ g_{31}\,(\lambda_1 - \lambda)\, y_1 + (f_{32} - \lambda g_{32})\, y_2 = 0, \\ g_{24}\,(\lambda_1 - \lambda)\, y_2 + (f_{44} - \lambda g_{44})\, y_4 = 0. \end{cases}$$

Sie geben, da

$$(21) \quad \begin{cases} \upsilon_1 = \lambda_1\, g_{13}\, y_3, \quad \upsilon_2 = f_{23}\, y_3 + \lambda_1\, g_{24}\, y_4, \quad \upsilon_3 = \lambda_1\, g_{31}\, y_1 + f_{32}\, y_2, \\ \qquad \upsilon_4 = \lambda_1\, g_{24}\, y_2 + f_{44}\, y_4, \\ \upsilon_1 = g_{13}\, y_3, \quad \upsilon_2 = g_{23}\, y_3 + g_{24}\, y_4, \quad \upsilon_3 = g_{31}\, y_1 + g_{32}\, y_2, \\ \qquad \upsilon_4 = g_{24}\, y_2 + g_{44}\, y_4 \end{cases}$$

ist, für $\lambda = \lambda_1$ mit Rücksicht auf (19): $\qquad J_1, i_3$.

8. Die Grundkurve. Zur Schnittkurve der beiden Flächen (17) gehört die gemeinsame Erzeugende $J_1 J_2$ ($y_3 = 0$, $y_4 = 0$). Nimmt man diese als Achse eines Ebenenbüschels

$$(22) \qquad y_3 - \mu y_4 = 0$$

mit dem Parameter μ und sucht die Punkte, welche die laufende Ebene μ des Büschels, abgesehen von den Punkten der Achse $J_1 J_2$, mit den beiden Flächen gemeinsam hat, so erhält man aus den drei Gleichungen (17) und (22) bis auf einen Proportionalitätsfaktor:

$$(23) \quad \begin{cases} y_1 = (f_{44} - \lambda_1 g_{44}) g_{24} + (f_{44} g_{23} - f_{23} g_{44}) \mu \\ y_2 = -(f_{44} - \lambda_1 g_{44}) g_{31} \mu \\ y_3 = 2 (f_{23} - \lambda_1 g_{23}) g_{31} \mu^3 \\ y_4 = 2 (f_{23} - \lambda_1 g_{23}) g_{31} \mu^2. \end{cases}$$

Demnach besteht die Grundkurve 4. Ordnung des Flächenbüschels (18) aus einer Raumkurve 3. Ordnung (23) und der Geraden $J_1 J_2$.

Der Punkt J_1, entsprechend dem Werte $\mu = 0$, ist der einzige Punkt der Raumkurve (23), der der Geraden $J_1 J_2$ ($y_3 = 0$, $y_4 = 0$) angehört. Die Ebene i_3 ist die Schmiegungsebene in ihm, da die drei in der Ebene $y_3 = 0$ liegenden Punkte der Raumkurve nach (23) alle in $\mu = 0$ zusammenfallen. Die Kante $J_1 J_2$ ist die Tangente der Raumkurve in J_1, da sie die Schnittlinie der Schmiegungsebene i_3 mit der nach (23) in J_1 berührenden und durch J_3 hindurchgehenden Tangentialebene i_4 der Raumkurve ist.

Damit ist die Bedeutung der drei Hauptelemente J_1, i_3, $J_1 J_2$ für die Raumkurve 3. Ordnung festgestellt.

9. Hauptgerade. Die Beziehungen zwischen reziproken Polaren lauten:

$$(24) \quad \begin{cases} r_1' = \lambda_1^2 g_{31} g_{24} r_1 - \lambda_1 f_{44} g_{31} r_6 \\ r_2' = \lambda_1 f_{23} g_{24} r_1 + \lambda_1^2 g_{24}^2 r_5 - f_{23} f_{44} r_6 \\ r_3' = -\lambda_1^2 g_{31} g_{24} r_3 - \lambda_1 f_{44} g_{31} r_4 - f_{23} f_{44} r_5 \\ r_4' = f_{23}^2 r_1 - \lambda_1 f_{23} g_{31} r_2 + \lambda_1^2 g_{31} g_{24} r_4 + \lambda_1 f_{23} g_{24} r_5 \\ r_5' = -\lambda_1 f_{23} g_{31} r_1 + \lambda_1^2 g_{31}^2 r_2 \\ r_6' = -\lambda_1^2 g_{31} g_{24} r_6; \end{cases}$$

$$(24a)\left\{\begin{aligned}
r_1' &= g_{31}\, g_{24}\, r_1 - g_{44}\, g_{31}\, r_6\\
r_2' &= g_{23}\, g_{24}\, r_1 + g_{24}^2\, r_5 - g_{23}\, g_{44}\, r_6\\
r_3' &= -\, g_{31}\, g_{44}\, r_3 - g_{44}\, g_{31}\, r_4 - g_{23}\, g_{44}\, r_5\\
r_4' &= g_{23}^2\, r_1 - g_{23}\, g_{31}\, r_2 + g_{31}\, g_{24}\, r_4 + g_{23}\, g_{24}\, r_5\\
r_5' &= -\, g_{23}\, g_{31}\, r_1 + g_{31}^2\, r_2\\
r_6' &= -\, g_{31}\, g_{24}\, r_6.
\end{aligned}\right.$$

Danach werden die Bedingungen der Hauptgeraden:

$$(25)\left\{\begin{aligned}
&g_{31}\, g_{24}\, (\lambda_1^2 - \rho)\, r_1 - g_{31}\, (\lambda_1\, f_{44} - \rho g_{44})\, r_6 = 0,\\
&g_{24}\, (\lambda_1\, f_{23} - \rho g_{23})\, r_1 + g_{24}^2\, (\lambda_1^2 - \rho)\, r_5 - (f_{23}\, f_{44} - \rho g_{23}\, g_{44})\, r_6 = 0,\\
&-g_{31}\, g_{24}\, (\lambda_1^2 - \rho)\, r_3 - g_{31}\, (\lambda_1\, f_{44} - \rho g_{44})\, r_4 - (f_{23}\, f_{44} - \rho g_{23}\, g_{44})\, r_5 = 0,\\
&(f_{23}^2 - \rho g_{23}^2)\, r_1 - g_{31}\, (\lambda_1\, f_{23} - \rho g_{23})\, r_2 + g_{31}\, g_{24}\, (\lambda_1^2 - \rho)\, r_4\\
&\qquad\qquad + g_{24}\, (\lambda_1\, f_{23} - \rho g_{23})\, r_5 = 0,\\
&-\, g_{31}\, (\lambda_1\, f_{23} - \rho g_{23})\, r_1 + g_{31}^2\, (\lambda_1^2 - \rho)\, r_2 = 0,\\
&-\, g_{31}\, g_{24}\, (\lambda_1^2 - \rho)\, r_6 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Mit $\rho = \lambda_1^2$ folgt hieraus mit Rücksicht auf (19):

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}
&r_6 = 0,\quad r_1 = 0,\quad g_{31}\, (f_{44} - \lambda_1 g_{44})\, r_4 + (f_{23}\, f_{44} - \lambda_1^2\, g_{23}\, g_{44})\, r_5 = 0,\\
&\qquad\qquad g_{31}\, r_2 - g_{24}\, r_5 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Da aber $r_1\, r_4 + r_2\, r_5 + r_3\, r_6 = 0$ sich auf $r_2\, r_5 = 0$ reduziert, so folgt aus der letzten Gleichung (26): $r_2 = 0$, $r_5 = 0$, und dann aus der vorletzten: $r_4 = 0$, also schließlich:

$$(27)\qquad r_1 = 0,\quad r_2 = 0,\quad r_4 = 0,\quad r_5 = 0,\quad r_6 = 0.$$

Die Kante $J_1\, J_2$ ist die einzige Hauptgerade.

10. Die Kegel im Büschel. Das Büschel (18) enthält den Kegel mit der Spitze J_1:

$$(28)\qquad (f_{44} - \lambda_1\, g_{44})\, y_4^2 + 2\, (f_{23} - \lambda_1\, g_{23})\, y_2\, y_3 = 0.$$

Seine Tangentialebene im Punkte $y_1^0\, y_2^0\, y_3^0\, y_4^0$ ist:

$$(f_{44} - \lambda_1\, g_{44})\, y_4^0\, y_4 + (f_{23} - \lambda_1\, g_{23})\, (y_2^0\, y_3 + y_3^0\, y_2) = 0$$

und in einem Punkte $y_1^0\, y_2^0\, 0\, 0$ der dem Kegel angehörigen Kante $J_1\, J_2$:

$$y_2^0\, y_3 = 0.$$

Die Hauptebene i_3 ist längs der Hauptgeraden $J_1\, J_2$, die den beiden Flächen $f = 0$ und $g = 0$ sowie dem Kegel $f - \lambda_1 g = 0$ angehört, Tangentialebene dieses Kegels. Im Hauptpunkte J_1 ist i_3 auch gemeinsame Tangentialebene von f und g (Lüroth'scher Satz).

Zusammenfassende Schlußbemerkung.

Bei der Aufzählung aller möglichen Arten der Flächenbüschel 2. Ordnung und der entsprechenden kanonischen Gleichungen der Grundflächen enthielt das jeweils zu wählende Koordinatentetraeder folgende Hauptelemente (Hauptpunkte, Hauptebenen und Hauptgerade):

In allen Fällen I: 4 Ecken, 4 Seitenflächen, 6 Kanten;
in allen Fällen II: 3 Ecken, 3 Seitenflächen, 4 Kanten;
in allen Fällen III: 2 Ecken, 2 Seitenflächen, 3 Kanten;
in allen Fällen IV: 2 Ecken, 2 Seitenflächen, 2 Kanten und
im Falle V: 1 Ecke, 1 Seitenfläche, 1 Kante.

Damit ist geometrisch nachgewiesen, daß nur auf Grund der Elementarteilertabelle die richtige systematische Einteilung der Flächenbüschel 2. Ordnung und der kanonischen Gleichungen möglich ist.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Staude, meinen herzlichsten Dank aussprechen zu dürfen für alle Anregungen und das stets wohlwollende Interesse, das er meiner Arbeit entgegenbrachte.

Rostock, im August 1926.

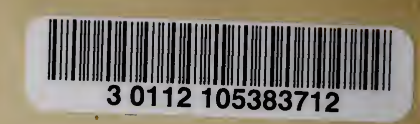
Erich Stoermer.



Lebenslauf.

Ich, Erich Stoermer, wurde am 29. März 1903 zu Rostock geboren als Sohn des Universitätsprofessors Dr. Richard Stoermer und seiner Gemahlin Magdalene, geb. Scheel. Die Schulzeit verbrachte ich auf dem Rostocker Gymnasium, das ich Ostern 1921 nach bestandener Reifeprüfung verließ. In den folgenden Jahren studierte ich an den Universitäten in Rostock, Freiburg i. B., München und zuletzt wieder in Rostock Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie. Am 15. Januar 1926 bestand ich die Staatsprüfung für das Lehramt an höheren Schulen und bin seit Ostern 1926 im Ausbildungsdienst am hiesigen Realgymnasium tätig. Nach vorbereitenden Arbeiten im S. S. 1925 wurde im Laufe dieses Jahres unter Anleitung von Herrn Geh. Hofrat Prof. Dr. Staude die vorliegende Arbeit ausgeführt.

Ich besitze die Staatsangehörigkeit von Mecklenburg-Schwerin.


3 0112 105383712